愛媛大学

2013年 理学部・工学部 第3問

数理 石井K

$\boxed{3}$ 数列 $\{a_n\}$ を次のように定める．

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 4, \quad a_{n+2} = -a_{n+1} + 12a_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

(1) $b_n = a_{n+1} - 3a_n$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ とおく．数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ．

(2) $c_n = a_{n+1} + 4a_n$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ とおく．数列 $\{c_n\}$ の一般項を求めよ．

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ を求めよ．

(1) $a_{n+2} - 3a_{n+1} = -4(a_{n+1} - a_n)$

$\therefore$ $b_{n+1} = -4b_n$ となり．数列 $\{b_n\}$ は初項 $a_2 - 3a_1 = 1$，公比 -4 の等比数列

$\therefore$ $\underline{b_n = (-4)^{n-1}}$ //

(2) $a_{n+2} + 4a_{n+1} = 3(a_{n+1} + 4a_n)$

$\therefore$ $c_{n+1} = 3c_n$ となり．数列 $\{c_n\}$ は初項 $a_2 + 4a_1 = 8$，公比 3 の等比数列

$\therefore$ $\underline{c_n = 8 \cdot 3^{n-1}}$ //

(3) (1)，(2) より．

$a_{n+1} - 3a_n = (-4)^{n-1}$ $\cdots$ ①

$a_{n+1} + 4a_n = 8 \cdot 3^{n-1}$ $\cdots$ ②

② − ① より． $7a_n = 8 \cdot 3^{n-1} - (-4)^{n-1}$

$$\therefore a_n = \frac{8 \cdot 3^{n-1} - (-4)^{n-1}}{7}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{8 \cdot 3^{n} - (-4)^{n}}{7}}{\dfrac{8 \cdot 3^{n-1} - (-4)^{n-1}}{7}}$$

分子・分母を $(-4)^{n-1}$ で割った

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{24 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)^{n-1} + 4}{8 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)^{n-1} - 1}$$

$$= \underline{-4}$$ //