愛媛大学

2014年 医学部 第2問

数理 石井K

$\boxed{2}$ nは自然数，mは整数，k，α，βは実数とする．

(1) $\alpha \geqq 1$，$\beta \geqq 1$のとき，$\alpha\beta \geqq \alpha + \beta - 1$が成り立つことを示せ．

(2) xに関する2次方程式$x^2 - mx + k = 0$の2つの解をp，qとする．pが整数ならば，qとkも整数であることを示せ．

(3) xに関する2次方程式$x^2 - n^2x + n = 0$は，整数の解をもたないことを示せ．

(4) xに関する2次方程式$x^2 - (n-2)^2x + n = 0$が整数の解をもつとき，nの値とその解をすべて求めよ．

(1) (左辺)$-$(右辺)$= \alpha\beta - \alpha - \beta + 1$

$= (\alpha - 1)(\beta - 1)$

$\geqq 0$ （$\because \alpha \geqq 1, \beta \geqq 1$） $\therefore \alpha\beta \geqq \alpha + \beta - 1$ ▨

(2) 解と係数の関係より，$p + q = m$ $\therefore q = m - p$

$\therefore$ m：整数なので，p：整数ならば $m - p$：整数 $\therefore$ qは整数

また，このとき，$pq = k$ より，kも整数 ▨

(3) 整数の解をもつと仮定する．

(2)より，もう1つの解も整数となる．これらをα, βとおく．

解と係数の関係より，$\alpha + \beta = n^2$，$\alpha\beta = n$

n：自然数より，$\alpha + \beta > 0$，$\alpha\beta > 0$ すなわち $\alpha \geqq 1$，$\beta \geqq 1$

よって (1) より，$\alpha\beta \geqq \alpha + \beta - 1 \iff n^2 - n - 1 \leqq 0$

$\therefore \dfrac{1 - \sqrt{5}}{2} \leqq n \leqq \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2} < 2$

$\therefore$ n：自然数より $n = 1$ このとき，$x^2 - x + 1 = 0$となり整数の解をもたない ▨

(4) (3)と同様に，$\alpha + \beta = (n-2)^2$，$\alpha\beta = n$ $\therefore \alpha \geqq 1$，$\beta \geqq 1$ より

(1)から，$n \geqq (n-2)^2 - 1$ $\therefore n^2 - 5n + 3 \leqq 0$ $\therefore \dfrac{5 - \sqrt{13}}{2} \leqq n \leqq \dfrac{5 + \sqrt{13}}{2}$

これをみたすnは $n = 1, 2, 3, 4$．

$n = 1$のとき，$x^2 - x + 1 = 0$ となり整数解をもたない．$n = 2, 3$のときも同様

$n = 4$のとき $x^2 - 4x + 4 = 0$ $\therefore$ $n = 4$のとき 整数解 $x = 2$（重解）をもつ //