

2015年理学部・工学部第1問

1枚目/2枚

1 次の問いに答えよ。

- (1) 不定積分 $\int x^3 e^{x^2} dx$ を求めよ.
- (2) 定積分 $\int_{\frac{1}{e}}^e |\log x| dx$ を求めよ.
- (3) 楕円 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$ 上の点 $(\sqrt{2}, 1)$ における接線の方程式を求めよ.
- (4) $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^3$ からその整数部分を引いた値を a とするとき, $a^4 + 5a^3 + 4a^2 + 4a$ の値を求めよ.
- (5) 實数 a, b, c は $0 < a < b < c$, $\frac{1}{b} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c} \right)$ をみたすとする. このとき, $|b-a| < |b-c|$ が成り立つことを示せ.

$$\begin{aligned}
 (1) \int x^3 e^{x^2} dx &= \int x^2 (e^{x^2})' \cdot \frac{1}{2} dx \\
 &= \frac{x^2}{2} \cdot e^{x^2} - \int x \cdot e^{x^2} dx \\
 &= \frac{x^2}{2} \cdot e^{x^2} - \frac{1}{2} e^{x^2} + C \\
 &= \underbrace{\frac{1}{2}(x^2-1)e^{x^2} + C}_{(C \text{ は積分定数})}
 \end{aligned}$$

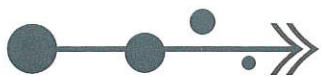
$$\begin{aligned}
 (2) (\text{左式}) &= \int_{\frac{1}{e}}^1 -\log x dx + \int_1^e \log x dx \\
 &= \left[-x \log x \right]_{\frac{1}{e}}^1 + \int_{\frac{1}{e}}^1 dx + \left[x \log x \right]_1^e - \int_1^e dx \\
 &= -\frac{1}{e} + 1 - \frac{1}{e} + e - (e-1) \\
 &= \underbrace{2 - \frac{2}{e}}_{\text{右}}
 \end{aligned}$$

$$(3) \frac{\sqrt{2}x}{4} + \frac{1 \cdot y}{2} = 1 \quad \therefore y = \underbrace{-\frac{\sqrt{2}}{2}x + 2}_{\text{右}}$$

$$(4) \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^3 = \frac{1+3\sqrt{5}+15+5\sqrt{5}}{8} = \sqrt{5} + 2 \quad 2 < \sqrt{5} < 3 \text{ より, 整数部分は } 4 \quad \therefore a = \sqrt{5} - 2$$

$$\begin{aligned}
 a+2 &= \sqrt{5} \quad \text{なので} \quad a^2 + 4a + 4 = 5 \quad \therefore a^2 + 4a - 1 = 0 \quad \begin{array}{l} \overline{a^2+a+1} \\ \overline{a^2+4a-1} \end{array} \begin{array}{l} \overline{a^4+5a^3+4a^2+4a} \\ \overline{a^4+4a^3-a^2} \end{array} \\
 &\text{右の割り算より.}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a^4 + 5a^3 + 4a^2 + 4a &= \underbrace{(a^2+4a-1)(a^2+a+1)}_{=0} + a+1 = \underbrace{\sqrt{5}-1}_{\text{右}} \quad \begin{array}{l} \overline{a^3+5a^2+4a} \\ \overline{a^3+4a^2-a} \end{array} \quad \begin{array}{l} \overline{a^2+5a} \\ \overline{a^2+4a-1} \end{array} \quad \nearrow a+1
 \end{aligned}$$



2015年理学部・工学部第1問

2枚目/2枚

1 次の問いに答えよ。

- (1) 不定積分 $\int x^3 e^{x^2} dx$ を求めよ。
- (2) 定積分 $\int_{\frac{1}{e}}^e |\log x| dx$ を求めよ。
- (3) 楕円 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$ 上の点 $(\sqrt{2}, 1)$ における接線の方程式を求めよ。
- (4) $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^3$ からその整数部分を引いた値を a とするとき, $a^4 + 5a^3 + 4a^2 + 4a$ の値を求めよ。
- (5) 実数 a, b, c は $0 < a < b < c$, $\frac{1}{b} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c} \right)$ をみたすとする。このとき, $|b-a| < |b-c|$ が成り立つことを示せ。

(5) $0 < a < b < c$ より,

$$\begin{aligned} |b-c| - |b-a| &= c-b-(b-a) \\ &= c+a-2b \\ &= c+a-2 \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}(\frac{1}{a}+\frac{1}{c})} \end{aligned}$$

$$= c+a - \frac{4ac}{a+c}$$

$$= \frac{(a+c)^2 - 4ac}{a+c}$$

$$= \frac{(a-c)^2}{a+c}$$

$$> 0 \quad (\because 0 < a < c \text{ より})$$

$$\therefore |b-a| < |b-c| \text{ が成り立つ } \blacksquare$$