



2011年医学部第5問

5 関数  $f(x) = \cos x - x \sin x$ ,  $g_n(x) = (x + n\pi) \sin x - \cos x$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) について, 次の問いに答えよ. ただし, 必要があれば,  $0 < x < \frac{\pi}{2}$  を満たすすべての  $x$  について  $\tan x > x$  が成り立つことを用いてよい.

- (1) すべての自然数  $n$ , 実数  $x$  に対して  $g_n(x) = (-1)^{n+1} f(x + n\pi)$  が成り立つことを示せ.
- (2) 自然数  $n$  に対して, 方程式  $g_n(x) = 0$  は  $0 \leq x \leq \pi$  の範囲においてただ1つの解をもつことを示せ.
- (3) (2)におけるただ1つの解を  $x_n$  とする.  $x_n$  は  $0 < x_n < \frac{1}{n\pi}$  を満たすことを示せ.
- (4)  $y_n = n\pi + x_n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) とおく. 定積分

$$S_n = \int_{y_n}^{y_{n+1}} |f(x)| dx$$

を,  $n$ ,  $x_n$  および  $x_{n+1}$  を用いて表せ.

- (5) 極限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n}$  を求めよ.