0002289900177999

愛媛大学

2016年 理学部・工学部 第1問

数理 石井K

$\boxed{1}$ 空間内の2点 A(4, −2, 2), B(2, −4, 4) に対して，線分 AB を直径とする球 S の中心を C とする.

(1) 球 S の方程式を求めよ.

(2) xy 平面と平行な平面 α のうち S と α が交わってできる円の半径が最大となるような α の方程式を求めよ.

(3) 原点 O から最も近い S 上の点 D，および最も遠い点 E の座標をそれぞれ求めよ.

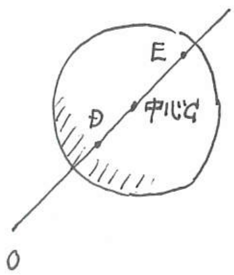
(4) (2) で求めた α と S が交わってできる円上を動く点 P に対して，△CDP の面積を最大とする P の座標をすべて求めよ. ただし，D は (3) で求めた点である.

(1) 線分ABが直径より. 球の中心は線分ABの中点 $(3,-3,3)$

半径は $\frac{1}{2}\sqrt{2^2+2^2+(-2)^2}=\sqrt{3}$

∴ Sの方程式は. $\underline{(x-3)^2+(y+3)^2+(z-3)^2=3}$ //

(2) αがSの中心を通るときであるから. $\underline{z=3}$ //



(3) 4点 O, C, D, E は一直線上にあり.

$OC=3\sqrt{3}$, $CD=CE=\sqrt{3}$ (半径) であるから.

$\overrightarrow{OD}=\frac{OD}{OC}\cdot\overrightarrow{OC}=\frac{3\sqrt{3}-\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}\overrightarrow{OC}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OC}$ ∴ $\underline{D(2,-2,2)}$ //

$\overrightarrow{OE}=\frac{OE}{OC}\cdot\overrightarrow{OC}=\frac{3\sqrt{3}+\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}\overrightarrow{OC}=\frac{4}{3}\overrightarrow{OC}$ ∴ $\underline{E(4,-4,4)}$ //

(4) αとSが交わってできる円は. $(x-3)^2+(y+3)^2=3$

∴ $x=\sqrt{3}\cos\theta+3$, $y=\sqrt{3}\sin\theta-3$ とおける. $(0\leqq\theta<2\pi)$

∴ $P(\sqrt{3}\cos\theta+3,\ \sqrt{3}\sin\theta-3,\ 3)$

$\overrightarrow{CD}=(-1,1,-1)$, $\overrightarrow{CP}=(\sqrt{3}\cos\theta,\ \sqrt{3}\sin\theta,\ 0)$

$$\therefore \triangle CDP=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{CD}|^2|\overrightarrow{CP}|^2-(\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{CP})^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{3\cdot3-(-\sqrt{3}\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{6+3\sin2\theta}$$

∴最大となるのは. $0\leqq\theta<2\pi$ より. $\theta=\frac{1}{4}\pi,\ \frac{5}{4}\pi$ ∴ $\underline{P\left(\pm\frac{\sqrt{6}}{2}+3,\ \pm\frac{\sqrt{6}}{2}-3,\ 3\right)}$ (複号同順) //