



2018年 理学部・工学部 第5問

5 $x > 0$ の範囲で関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos t - x \sin t| dt$$

と定義する. また, $x > 0$ の範囲で関数 $g(x)$ は

$$\frac{\pi}{2} < g(x) < \pi, \quad \cos g(x) = -\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \quad \sin g(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

を満たすとする. このとき, 次の問いに答えよ.

(1) $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$, $x > 0$ のとき, 関係式

$$\cos t - x \sin t = \sqrt{1+x^2} \sin(t+g(x))$$

が成り立つことを示せ.

(2) すべての $x > 0$ に対して $f(x)$ は

$$f(x) = \sqrt{1+x^2} \int_{g(x)}^{\frac{\pi}{2}+g(x)} |\sin s| ds$$

と表せることを示せ.

(3) $f(x) = 2\sqrt{1+x^2} - 1 - x$ ($x > 0$) を示せ.

(4) 関数 $f(x)$ ($x > 0$) の最小値とそのときの x の値を求めよ.