2016年 医学部 第1問　1枚目／2枚

数理 石井K

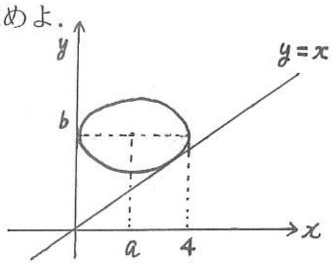
$\boxed{1}$ 次の問いに答えよ．

(1) a，b を正の実数とする．楕円 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ を x 軸方向に a，y 軸方向に b だけ平行移動して得られる楕円が y 軸と直線 $y=x$ に接するような a，b を求めよ．

(2) 1辺の長さが $\sqrt{n}$ の正 n 角形 $A_1A_2\cdots A_n$ における三角形 $A_1A_2A_3$ の面積を S_n とする．このとき $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ を求めよ．

(3) a，b は実数で $a>0$ を満たすとする．放物線 $y=\dfrac{1}{2a^2}x^2$ と曲線 $y=\log x+b$ がただ1つの共有点Pをもつとき，Pの座標および b を a を用いて表せ．

(4) $1\leqq x\leqq 2$ とする．関数 $f(x)=\displaystyle\int_1^2\frac{|t-x|}{t^2}\,dt$ を最小にする x の値を求めよ．



(1) 平行移動後の楕円は，

$$\frac{(x-a)^2}{4}+(y-b)^2=1$$

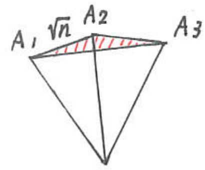
右図より $2a=4$　∴ $\underline{a=2}$ //

$y=x$ を代入して，

$$\frac{1}{4}(x-2)^2+(x-b)^2=1 \iff \frac{5}{4}x^2-(2b+1)x+b^2=0$$

これが重解をもてばよいので，判別式を D とすると，

$D=(2b+1)^2-4\cdot\frac{5}{4}\cdot b^2=0$　∴ $b^2-4b-1=0$　$b>0$ より $\underline{b=2+\sqrt{5}}$ //

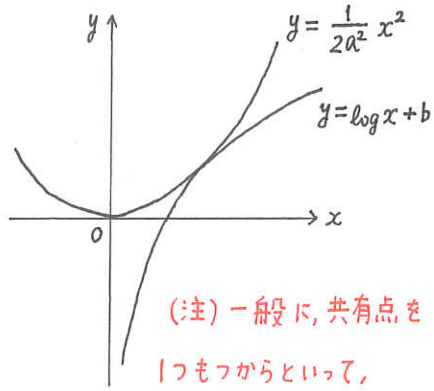


(2) $S_n=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}\cdot\sin\frac{n-2}{n}\pi$

$=\frac{1}{2}\cdot n\sin\left(\pi-\frac{2\pi}{n}\right)$

$=\frac{1}{2}n\sin\frac{2\pi}{n}$

∴ $\lim\limits_{n\to\infty}\pi\cdot\dfrac{\sin\frac{2\pi}{n}}{\frac{2\pi}{n}}=\underline{\pi}$ //



(3) $f(x)=\dfrac{1}{2a^2}x^2$，$g(x)=\log x+b$ とおくと

右図より，共有点を $P\left(t,\frac{1}{2a^2}t^2\right)$ とおくと　$f'(t)=g'(t)$ かつ $f(t)=g(t)$

∴ $\dfrac{t}{a^2}=\dfrac{1}{t}$ かつ $\dfrac{1}{2a^2}\cdot t^2=\log t+b$

$t>0$ より これを解くと，$t=a$，$\log t=\frac{1}{2}-b$

∴ $\underline{P\left(a,\frac{1}{2}\right),\ b=\frac{1}{2}-\log a}$ //

(注) 一般に，共有点を1つもつからといって，2曲線が接するとは限らない！が，今回はグラフの形が分かっているので，接するとして解いた．

愛媛大学

2016年 医学部 第1問　2枚目／2枚

数理 石井K

$\boxed{1}$ 次の問いに答えよ．

(1) a，b を正の実数とする．楕円 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ を x 軸方向に a，y 軸方向に b だけ平行移動して得られる楕円が y 軸と直線 $y=x$ に接するような a，b を求めよ．

(2) 1辺の長さが $\sqrt{n}$ の正 n 角形 $A_1A_2\cdots A_n$ における三角形 $A_1A_2A_3$ の面積を S_n とする．このとき $\lim_{n\to\infty} S_n$ を求めよ．

(3) a，b は実数で $a>0$ を満たすとする．放物線 $y=\dfrac{1}{2a^2}x^2$ と曲線 $y=\log x+b$ がただ1つの共有点 P をもつとき，P の座標および b を a を用いて表せ．

(4) $1\leqq x\leqq 2$ とする．関数 $f(x)=\displaystyle\int_1^2 \frac{|t-x|}{t^2}\,dt$ を最小にする x の値を求めよ．

(4)
$$f(x)=\int_1^x \frac{x-t}{t^2}\,dt+\int_x^2 \frac{t-x}{t^2}\,dt$$
$$=\int_1^x \frac{x}{t^2}-\frac{1}{t}\,dt+\int_x^2 \frac{1}{t}-\frac{x}{t^2}\,dt$$
$$=\left[-\frac{x}{t}-\log t\right]_1^x+\left[\log t+\frac{x}{t}\right]_x^2$$
$$=-1-\log x+x+\log 2+\frac{x}{2}-\log x-1$$
$$=\frac{3}{2}x-2\log x-2+\log 2$$

$$\therefore\ f'(x)=\frac{3}{2}-\frac{2}{x}$$
$$=\frac{3x-4}{2x}$$

x	1	$\cdots$	$\frac{4}{3}$	$\cdots$	2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

よって，増減表より $f(x)$ が最小となるのは，$x=\frac{4}{3}$ //