



2014年 医学部 第5問

5  $n$ は自然数,  $p_0, p_1, \dots, p_n$ は  $p_0 > 0, \dots, p_n > 0$ かつ  $p_0 + p_1 + \dots + p_n = 1$ を満たす定数とする. ポイント  $0, 1, 2, \dots, n-1, n$ が, それぞれ  $p_0, p_1, p_2, \dots, p_{n-1}, p_n$ の確率で得られる試行  $T$ を考える. 試行  $T$ を1回行って得られるポイントの期待値を  $a$ とし,  $A = [a] + 1$ とする. ただし, 実数  $x$ に対して  $[x]$ は  $x$ を超えない最大の整数を表す. 競技者は, 試行  $T$ を下記の各設問のルールに従って何回か行う.

(1)  $k$ を  $1 \leq k \leq n$ を満たす整数とする. 競技者は, 試行  $T$ を以下のルールに従って最大2回まで行う.

- ① 試行  $T$ を1回行い, もしポイントが  $k$ 以上であれば2回目の試行を行わず, このポイントを賞金とする.
- ② 1回目のポイントが  $k$ 未満であれば2回目の試行  $T$ を行う. このとき, 1回目のポイントは無効とし, 2回目のポイントを賞金とする.

このとき賞金の期待値を  $b_k$ とする.  $b_k$ を求めよ.

(2) (1)の期待値  $b_k$ は  $k$ が  $A$ のとき最大となることを示せ.

(3)  $m$ を  $1 \leq m \leq n$ を満たす整数とする. 競技者は, 試行  $T$ を以下のルールに従って最大3回まで行う.

- ① 試行  $T$ を1回行い, もしポイントが  $m$ 以上であれば2回目以降の試行を行わず, このポイントを賞金とする.
- ② 1回目のポイントが  $m$ 未満であれば2回目の試行  $T$ を行う. 2回目のポイントが  $A$ 以上であれば3回目の試行を行わない. このとき, 1回目のポイントは無効とし, 2回目のポイントを賞金とする.
- ③ 2回目のポイントが  $A$ 未満であれば3回目の試行  $T$ を行う. このとき, 1回目, 2回目のポイントは無効とし, 3回目のポイントを賞金とする.

このとき賞金の期待値を  $c_m$ とする.  $c_m$ を求めよ.

(4) (3)の期待値  $c_m$ は  $m$ が  $B = [b_A] + 1$ のとき最大となり,  $c_B \geq b_A$ であることを示せ. ただし,  $b_A$ は(1)で求めた期待値  $b_k$ の  $k = A$ のときの値である.

(5)  $n = 5$ とし, 試行  $T$ として, 5枚の硬貨を同時に投げ, 表の出た枚数をポイントとする試行を考える. また,  $b_k, c_m$ は上記で定義したものとする.

(i)  $p_0, p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, a$ を求めよ.

(ii) (1)のように最大2回試行を行う場合,  $b_k$ の最大値を求めよ.

(iii) (3)のように最大3回試行を行う場合,  $c_m$ の最大値を求めよ.