



2015年医学部第5問

1枚目 / 2枚

- 5 n を自然数, i を虚数単位とする. 集合 I_1, I_2, I_3, I_4 , および A を

$$I_1 = \{k \mid k \text{ は } n \text{ 以下の自然数}\}$$

$$I_2 = \{-k \mid k \text{ は } n \text{ 以下の自然数}\}$$

$$I_3 = \{ki \mid k \text{ は } n \text{ 以下の自然数}\}$$

$$I_4 = \{-ki \mid k \text{ は } n \text{ 以下の自然数}\}$$

$$A = I_1 \cup I_2 \cup I_3 \cup I_4 \cup \{0\}$$

とする. 集合 A の要素が 1 つずつ書かれたカードが $4n+1$ 枚ある. ただし, それぞれのカードに書かれている要素は異なるものとする. これらのカードをよくまぜて, 左から右に一列に並べる. 左から k 番目のカードに書かれた数を X_k とするとき, 次の確率を求めよ.

(1) 積 $X_1 X_2 X_3$ が 0 となる.

$$(1) X_1 X_2 X_3 \neq 0 \Leftrightarrow X_1 \neq 0 \text{ かつ } X_2 \neq 0 \text{ かつ } X_3 \neq 0$$

(2) 積 $X_1 X_2 X_3$ が実数となる.

$$\therefore P(X_1 X_2 X_3 \neq 0) = \frac{4n P_3}{4n+1 P_3}$$

(3) 和 $X_1 + X_2$ が実数となる.

$$= \frac{4n(4n-1)(4n-2)}{(4n+1)(4n)(4n-1)}$$

(4) $X_1(X_2 + X_3)$ が 0 となる.

$$= \frac{4n-2}{4n+1}$$

(5) $X_1(X_2 + X_3)$ が実数となる.

$$\therefore \text{余事象より, } P(X_1 X_2 X_3 = 0) = 1 - P(X_1 X_2 X_3 \neq 0)$$

$$= 1 - \frac{4n-2}{4n+1}$$

(2) $X_1 X_2 X_3$ が実数

$$= \frac{3}{4n+1}$$

 $\Leftrightarrow X_1 X_2 X_3 = 0$ または X_1, X_2, X_3 がすべて $I_1 \cup I_2$ に入っている.
 $\text{または, } X_1, X_2, X_3 \text{ のうち } 1 \text{ つが } I_1 \cup I_2 \text{ に, } 2 \text{ つが } I_3 \cup I_4$

に入っている.

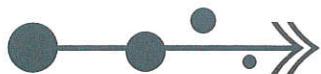
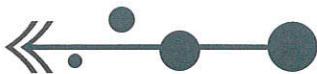
$$\therefore \text{石留率は, } \frac{3}{4n+1} + \frac{2n P_3}{4n+1 P_3} + \frac{2n P_2 \cdot 2n P_1 \cdot 3}{4n+1 P_3} = \frac{3}{4n+1} + \frac{2n(2n-1)(2n-2)}{(4n+1) \cdot 4n \cdot (4n-1)} + \frac{2n \cdot 3 \cdot 2n(2n-1)}{(4n+1) \cdot 4n(4n-1)}$$

$$= \frac{2n+2}{4n+1}$$

(3) $X_1 + X_2$ が実数 $\Leftrightarrow X_1, X_2$ がともに $I_1 \cup I_2 \cup \{0\}$ に入っている. または $X_1 = ki, X_2 = -ki$ または $X_1 = -ki, X_2 = ki$

$$\therefore \text{石留率は, } \frac{2n+1 P_2}{4n+1 P_2} + \frac{2n}{4n+1 P_2} = \frac{(2n+1) \cdot 2n + 2n}{(4n+1) \cdot 4n}$$

$$= \frac{n+1}{4n+1}$$



2015年医学部第5問

2枚目/2枚

数理
石井K

- 5 n を自然数, i を虚数単位とする. 集合 I_1, I_2, I_3, I_4 , および A を

$$I_1 = \{k \mid k \text{ は } n \text{ 以下の自然数}\}$$

$$I_2 = \{-k \mid k \text{ は } n \text{ 以下の自然数}\}$$

$$I_3 = \{ki \mid k \text{ は } n \text{ 以下の自然数}\}$$

$$I_4 = \{-ki \mid k \text{ は } n \text{ 以下の自然数}\}$$

$$A = I_1 \cup I_2 \cup I_3 \cup I_4 \cup \{0\}$$

とする. 集合 A の要素が 1 つずつ書かれたカードが $4n+1$ 枚ある. ただし, それぞれのカードに書かれている要素は異なるものとする. これらのカードをよくまぜて, 左から右に一列に並べる. 左から k 番目のカードに書かれた数を X_k とするとき, 次の確率を求めよ.

- (1) 積 $X_1 X_2 X_3$ が 0 となる.
- (2) 積 $X_1 X_2 X_3$ が実数となる.
- (3) 和 $X_1 + X_2$ が実数となる.
- (4) $X_1(X_2 + X_3)$ が 0 となる.
- (5) $X_1(X_2 + X_3)$ が実数となる.

(4) (i) $X_1 = 0$ となるとき. 確率は $\frac{1}{4n+1}$

(ii) $X_2 + X_3 = 0$ となるとき. 2枚目は 0以外なら何でもいい.

確率は $\frac{4n+1}{4n+1 P_2} = \frac{1}{4n+1}$ 2枚目が決まると, 3枚目は自動的に 1 枚に決まる.

(iii) $X_1 = 0$ かつ $X_2 + X_3 = 0$ となるとき.

確率は $\frac{1 \cdot 4n+1}{4n+1 P_3} = \frac{1}{(4n+1)(4n-1)}$

(注)

(i), (ii) は (iii) のときを重複して数えているので引くと.

(5) は 医学部のみ.

$$\frac{1}{4n+1} + \frac{1}{4n+1} - \frac{1}{(4n+1)(4n-1)} = \frac{8n-3}{(4n+1)(4n-1)} //$$

(i). $X_1(X_2 + X_3) = 0$ のとき. \rightarrow (4)

(ii). (i) 以外で, $X_1, X_2 + X_3$ がともに実数のとき.

X_1, X_2, X_3 がすべて実数で, $X_1 \neq 0, X_2 + X_3 \neq 0$

$$\therefore \frac{2n \cdot (2n P_2 - 2(n-1))}{4n+1 P_3} = \frac{2n^2 - 2n + 1}{(4n+1)(4n-1)}$$

(iii) (i) 以外で, $X_1, X_2 + X_3$ がともに純虚数のとき.

$$(ii) \text{ と同じように考えると } \frac{2n^2 - 2n + 1}{(4n+1)(4n-1)}$$

$$(i) \sim (iii) \text{ より}, \frac{8n-3 + 2(2n^2 - 2n + 1)}{(4n+1)(4n-1)} = \frac{4n^2 + 4n - 1}{(4n+1)(4n-1)} //$$