愛媛大学

2015年 医学部 第5問　　1枚目／2枚

数理 石井K

$\boxed{5}$ nを自然数，iを虚数単位とする．集合I_1，I_2，I_3，I_4，およびAを

$I_1=\{k \mid k$はn以下の自然数$\}$
$I_2=\{-k \mid k$はn以下の自然数$\}$
$I_3=\{ki \mid k$はn以下の自然数$\}$
$I_4=\{-ki \mid k$はn以下の自然数$\}$
$A=I_1\cup I_2\cup I_3\cup I_4\cup\{0\}$

とする．集合Aの要素が1つずつ書かれたカードが$4n+1$枚ある．ただし，それぞれのカードに書かれている要素は異なるものとする．これらのカードをよくまぜて，左から右に一列に並べる．左からk番目のカードに書かれた数をX_kとするとき，次の確率を求めよ．

(1) 積$X_1X_2X_3$が0となる．
(2) 積$X_1X_2X_3$が実数となる．
(3) 和X_1+X_2が実数となる．
(4) $X_1(X_2+X_3)$が0となる．
(5) $X_1(X_2+X_3)$が実数となる．

(1) $X_1X_2X_3\neq 0 \iff X_1\neq 0$ かつ $X_2\neq 0$ かつ $X_3\neq 0$

$$\therefore P(X_1X_2X_3\neq 0)=\frac{{}_{4n}P_3}{{}_{4n+1}P_3}=\frac{4n(4n-1)(4n-2)}{(4n+1)(4n)(4n-1)}=\frac{4n-2}{4n+1}$$

$\therefore$ 余事象より．$P(X_1X_2X_3=0)=1-P(X_1X_2X_3\neq 0)$

$$=1-\frac{4n-2}{4n+1}=\frac{3}{4n+1}$$

(2) $X_1X_2X_3$が実数

$\iff X_1X_2X_3=0$ または．X_1,X_2,X_3がすべて$I_1\cup I_2$に入っている．
または．X_1,X_2,X_3のうち1つが$I_1\cup I_2$に，2つが$I_3\cup I_4$に入っている．

$$\therefore \text{確率は．}\ \frac{3}{4n+1}+\frac{{}_{2n}P_3}{{}_{4n+1}P_3}+\frac{{}_{2n}P_2\cdot{}_{2n}P_1\cdot 3}{{}_{4n+1}P_3}=\frac{3}{4n+1}+\frac{2n(2n-1)(2n-2)}{(4n+1)\cdot 4n\cdot(4n-1)}+\frac{2n\cdot 3\cdot 2n(2n-1)}{(4n+1)\cdot 4n(4n-1)}$$

$$=\frac{2n+2}{4n+1}$$

(3) X_1+X_2が実数 $\iff X_1,X_2$がともに$I_1\cup I_2\cup\{0\}$に入っている．または．$X_1=ki,X_2=-ki$ または $X_1=-ki,X_2=ki$

$$\therefore \text{確率は．}\ \frac{{}_{2n+1}P_2}{{}_{4n+1}P_2}+\frac{2n}{{}_{4n+1}P_2}=\frac{(2n+1)\cdot 2n+2n}{(4n+1)\cdot 4n}=\frac{n+1}{4n+1}$$

愛媛大学

2015年 医学部 第5問　　2枚目／2枚

数理 石井K

5 n を自然数，i を虚数単位とする．集合 I_1，I_2，I_3，I_4，および A を

$$I_1 = \{k \mid k \text{ は } n \text{ 以下の自然数}\}$$
$$I_2 = \{-k \mid k \text{ は } n \text{ 以下の自然数}\}$$
$$I_3 = \{ki \mid k \text{ は } n \text{ 以下の自然数}\}$$
$$I_4 = \{-ki \mid k \text{ は } n \text{ 以下の自然数}\}$$
$$A = I_1 \cup I_2 \cup I_3 \cup I_4 \cup \{0\}$$

とする．集合 A の要素が1つずつ書かれたカードが $4n+1$ 枚ある．ただし，それぞれのカードに書かれている要素は異なるものとする．これらのカードをよくまぜて，左から右に一列に並べる．左から k 番目のカードに書かれた数を X_k とするとき，次の確率を求めよ．

(1) 積 $X_1X_2X_3$ が0となる．
(2) 積 $X_1X_2X_3$ が実数となる．
(3) 和 X_1+X_2 が実数となる．
(4) $X_1(X_2+X_3)$ が0となる．
(5) $X_1(X_2+X_3)$ が実数となる．

(4) (i) $X_1=0$ となるとき．確率は $\dfrac{1}{4n+1}$

(ii) $X_2+X_3=0$ となるとき．

確率は $\dfrac{4n\cdot 1}{{}_{4n+1}P_2} = \dfrac{1}{4n+1}$

2枚目は0以外なら何でもいい．2枚目が決まると，3枚目は自動的に1枚に決まる．

(iii) $X_1=0$ かつ $X_2+X_3=0$ となるとき．

確率は $\dfrac{1\cdot 4n\cdot 1}{{}_{4n+1}P_3} = \dfrac{1}{(4n+1)(4n-1)}$

(i)，(ii) は (iii) のときを重複して数えているので引くと，

$$\frac{1}{4n+1}+\frac{1}{4n+1}-\frac{1}{(4n+1)(4n-1)} = \underline{\frac{8n-3}{(4n+1)(4n-1)}}$$ //

(注)

(5)は医学部のみ．

(i). $X_1(X_2+X_3)=0$ のとき．→ (4)

(ii). (i)以外で，X_1，X_2+X_3 がともに実数のとき．

X_1，X_2，X_3 がすべて実数で，$X_1 \neq 0$，$X_2+X_3 \neq 0$

$$\therefore \frac{2n\cdot({}_{2n}P_2-2(n-1))}{{}_{4n+1}P_3} = \frac{2n^2-2n+1}{(4n+1)(4n-1)}$$

(iii) (i)以外で，X_1，X_2+X_3 がともに純虚数のとき．

(ii)と同じように考えれるので，$\dfrac{2n^2-2n+1}{(4n+1)(4n-1)}$

(i)〜(iii)より，

$$\frac{8n-3+2(2n^2-2n+1)}{(4n+1)(4n-1)} = \underline{\frac{4n^2+4n-1}{(4n+1)(4n-1)}}$$ //