2014年 医学部 第3問　　1枚目／2枚

数理 石井K

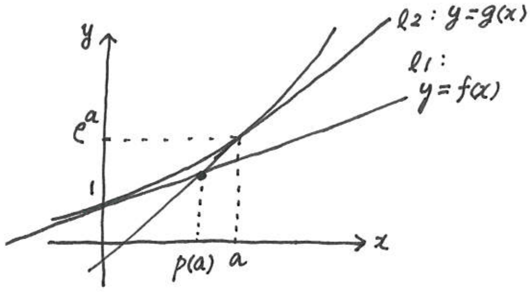
$\boxed{3}$ a, bは, $0 < b < a$を満たす実数とする. 曲線$y = e^x$上の点$(0,\ 1)$における接線ℓ_1の方程式を$y = f(x)$, 点$(a,\ e^a)$における接線ℓ_2の方程式を$y = g(x)$とおく. また, ℓ_1とℓ_2の交点のx座標を$p(a)$とする. 連立不等式

$$0 \leqq x \leqq b, \quad f(x) \leqq y \leqq e^x$$

の表す領域の面積をS_1, 連立不等式

$$b \leqq x \leqq a, \quad g(x) \leqq y \leqq e^x$$

の表す領域の面積をS_2とし, $R = e^{-b}S_2$とおく. このとき, 次の問いに答えよ. 必要ならば, すべての自然数kに対して$\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^k e^{-x} = 0$が成り立つことを用いてよい.



(1) $p(a)$を求めよ.
(2) S_1とS_2を求めよ.
(3) $t = a - b$とする. Rをtのみの関数として表せ.
(4) 極限値$\displaystyle\lim_{a\to\infty}(a - p(a))$を求めよ.
(5) $b = p(a)$とする. このとき, 極限値$\displaystyle\lim_{a\to\infty}\frac{S_2}{S_1}$を求めよ.

(1) $y' = e^x$ より

$\ell_1 : y = e^0 x + 1 \quad \therefore \ell_1 : y = x + 1$

$\ell_2 : y = e^a(x-a) + e^a$

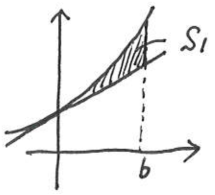
$\therefore \ell_2 : y = e^a x + (1-a)e^a$

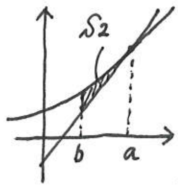
$\therefore (e^a - 1)x + (1-a)e^a - 1 = 0$

$\therefore x = \dfrac{1-(1-a)e^a}{e^a - 1}$

$\therefore \underline{p(a) = \dfrac{1 - e^a + ae^a}{e^a - 1}}$ //

(2)





$S_1 = \displaystyle\int_0^b e^x - (x+1)\,dx$

$= \left[e^x - \dfrac{x^2}{2} - x\right]_0^b$

$= \underline{e^b - \dfrac{b^2}{2} - b - 1}$ //

$S_2 = \displaystyle\int_b^a e^x - e^a x - (1-a)e^a\,dx$

$= \left[e^x - \dfrac{e^a}{2}x^2 - (1-a)e^a x\right]_b^a$

$= e^a - \dfrac{e^a}{2}\cdot a^2 - (1-a)ae^a - e^b + \dfrac{e^a}{2}b^2 + (1-a)e^a b$

$= \underline{\dfrac{1}{2}(a-b)(a-b-2)e^a + e^a - e^b}$ //

(3) $R = e^{-b}S_2$

$= \dfrac{1}{2}(a-b)(a-b-2)e^{a-b} + e^{a-b} - 1$

$= \dfrac{1}{2}t(t-2)e^t + e^t - 1 \quad = \underline{\dfrac{1}{2}(t^2 - 2t + 2)e^t - 1}$ //

2014年 医学部 第3問　2枚目/2枚

数理 石井K

$\boxed{3}$ a, bは, $0<b<a$を満たす実数とする. 曲線$y=e^x$上の点$(0,\ 1)$における接線ℓ_1の方程式を$y=f(x)$, 点$(a,\ e^a)$における接線ℓ_2の方程式を$y=g(x)$とおく. また, ℓ_1とℓ_2の交点のx座標を$p(a)$とする. 連立不等式

$$0 \leqq x \leqq b, \quad f(x) \leqq y \leqq e^x$$

の表す領域の面積をS_1, 連立不等式

$$b \leqq x \leqq a, \quad g(x) \leqq y \leqq e^x$$

の表す領域の面積をS_2とし, $R=e^{-b}S_2$とおく. このとき, 次の問いに答えよ. 必要ならば, すべての自然数kに対して$\lim_{x\to\infty} x^k e^{-x}=0$が成り立つことを用いてよい.

(1) $p(a)$を求めよ.

(2) S_1とS_2を求めよ.

(3) $t=a-b$とする. Rをtのみの関数として表せ.

(4) 極限値$\lim_{a\to\infty}(a-p(a))$を求めよ.

(5) $b=p(a)$とする. このとき, 極限値$\lim_{a\to\infty}\dfrac{S_2}{S_1}$を求めよ.

(4) (1)より $\displaystyle\lim_{a\to\infty}(a-p(a)) = \lim_{a\to\infty}\frac{ae^a-a-1+e^a-ae^a}{e^a-1}$

$$= \lim_{a\to\infty}\left(1-\frac{\frac{a}{e^a}}{1-\frac{1}{e^a}}\right)$$

$$= \underline{1}\ //$$

(5) $b=p(a)$ のとき (4)より. $\displaystyle\lim_{a\to\infty}(a-b)=1$ すなわち $\displaystyle\lim_{a\to\infty} t = 1$

$$\therefore \lim_{a\to\infty}\frac{S_2}{S_1} = \lim_{a\to\infty}\frac{e^bR}{S_1}$$

$$= \lim_{a\to\infty}\frac{\frac{1}{2}(t^2-2t+2)e^t-1}{1-\frac{b^2}{e^b}-\frac{b}{e^b}-\frac{1}{e^b}}$$

$$= \underline{\frac{1}{2}e-1}\ //$$