



2011年医学部第5問

5 関数 $f(x) = \cos x - x \sin x$, $g_n(x) = (x + n\pi) \sin x - \cos x$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) について, 次の問いに答えよ. ただし, 必要があれば, $0 < x < \frac{\pi}{2}$ を満たすすべての x について $\tan x > x$ が成り立つことを用いてよい.

- (1) すべての自然数 n , 実数 x に対して $g_n(x) = (-1)^{n+1} f(x + n\pi)$ が成り立つことを示せ.
- (2) 自然数 n に対して, 方程式 $g_n(x) = 0$ は $0 \leq x \leq \pi$ の範囲においてただ1つの解をもつことを示せ.
- (3) (2)におけるただ1つの解を x_n とする. x_n は $0 < x_n < \frac{1}{n\pi}$ を満たすことを示せ.
- (4) $y_n = n\pi + x_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) とおく. 定積分

$$S_n = \int_{y_n}^{y_{n+1}} |f(x)| dx$$

を, n , x_n および x_{n+1} を用いて表せ.

- (5) 極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n}$ を求めよ.