徳島大学

2013年 医（保健）・工学部 第3問

数理 石井K

$\boxed{3}$ Oを原点とする座標空間において，点$A(-4,\ 8,\ 2)$を通りベクトル$\vec{u}=(3,\ 0,\ 1)$に平行な直線をℓとする．また，点$B(10,\ 3,\ -4)$を通りベクトル$\vec{v}=(-1,\ 3,\ 0)$に平行な直線をmとする．Pをℓ上の点とし，Qをm上の点とする．このとき，実数s，tを用いて，$\overrightarrow{AP}=s\vec{u}$，$\overrightarrow{BQ}=t\vec{v}$と表すことができる．

(1) ベクトル$\overrightarrow{OP}$，$\overrightarrow{OQ}$の成分をs，tを用いて表せ．

(2) 2直線ℓとmは共有点をもたないことを証明せよ．

(3) ベクトル$\overrightarrow{PQ}$がベクトル$\vec{u}$，$\vec{v}$の両方に垂直となるとき，点Pおよび点Qの座標を求めよ．

(1) $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP}=(-4,8,2)+s(3,0,1)=\underline{(3s-4,\ 8,\ s+2)}$ //

$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BQ}=(10,3,-4)+t(-1,3,0)=\underline{(-t+10,\ 3t+3,\ -4)}$ //

(2) (1)より．$P=Q$とすると，成分を比較して，

$$\begin{cases} 3s-4=-t+10 & \cdots ① \\ 8=3t+3 & \cdots ② \\ s+2=-4 & \cdots ③ \end{cases}$$

∴ ③より．$s=-6$

②より $t=\frac{5}{3}$

これらは①をみたさない

∴ $P=Q$となることはないので，ℓとmは共有点をもたない ▨

(3) (1)より．$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}=(-t-3s+14,\ 3t-5,\ -s-6)$

∴ $\overrightarrow{PQ}\perp\vec{u} \iff \overrightarrow{PQ}\cdot\vec{u}=0$ より．$-3t-9s+42-s-6=0$

∴ $10s+3t=36 \cdots ④$

$\overrightarrow{PQ}\perp\vec{v} \iff \overrightarrow{PQ}\cdot\vec{v}=0$ より．$t+3s-14+9t-15=0$

∴ $3s+10t=29 \cdots ⑤$

④，⑤より．$s=3$，$t=2$

∴ $\underline{P(5,8,5),\ Q(8,9,-4)}$ //