弘前大学

2014 年 理系 第 4 問

数理 石井K

$\boxed{4}$ 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を,

$$\begin{cases} a_1=1, \quad a_{n+1}=\sqrt{2b_n+1} \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \\ b_1=3, \quad b_{n+1}=\sqrt{2a_n+1} \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \end{cases}$$

初項こそ異なるが対称な形をしているので, 省けるところは「同様にして…」として, 書く量を減らせる.

と定めるとき, 次の問いに答えよ.

(1) $\alpha=1+\sqrt{2}$ とする. 自然数 n に対して, 不等式 $|a_{n+1}-\alpha| \leqq \left(\dfrac{2}{1+\alpha}\right)|b_n-\alpha|$ が成り立つことを示せ.

(2) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n$ を求めよ.

(1)
$$\begin{aligned} a_{n+1}-\alpha &= \sqrt{2b_n+1}-\alpha \\ &= \frac{(\sqrt{2b_n+1}-\alpha)(\sqrt{2b_n+1}+\alpha)}{\sqrt{2b_n+1}+\alpha} \\ &= \frac{2b_n+1-(1+\sqrt{2})^2}{\sqrt{2b_n+1}+\alpha} \\ &= \frac{2(b_n-\alpha)}{\sqrt{2b_n+1}+\alpha} \\ &\leqq \frac{2(b_n-\alpha)}{1+\alpha} \quad (\because\ b_n \geqq 0 \text{ より}) \end{aligned}$$

$$\therefore\ |a_{n+1}-\alpha| \leqq \frac{2}{1+\alpha}|b_n-\alpha| \quad ■$$

(2) (1) と同様にして, $|b_{n+1}-\alpha| \leqq \dfrac{2}{1+\alpha}|a_n-\alpha|$

$$\therefore\ |a_{n+2}-\alpha| \leqq \frac{2}{1+\alpha}|b_{n+1}-\alpha| \leqq \left(\frac{2}{1+\alpha}\right)^2|a_n-\alpha| \quad \cdots (*)$$

$\therefore$ n: 偶数のとき. $|a_n-\alpha| \leqq \left(\dfrac{2}{1+\alpha}\right)^{\frac{n}{2}-1}|a_2-\alpha|$

n: 奇数のとき. $|a_n-\alpha| \leqq \left(\dfrac{2}{1+\alpha}\right)^{\frac{n-1}{2}}|a_1-\alpha|$

いずれの場合も $n\to\infty$ のとき $|a_n-\alpha| \to 0$

$\therefore\ \displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 1+\sqrt{2}$ //

$(*)$ 式において. はさみうちの原理より. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}|b_{n+1}-\alpha|=0$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty} b_n = 1+\sqrt{2}$$ //