



2016年理系第4問

4 N を 3 以上の自然数とする.

1 から N までの数字が 1 つずつ書かれた N 枚のカードを袋に入れ、「無作為に 1 枚のカードを取り出し、そのカードを袋に戻さず次のカードを取り出す」という作業を 3 枚のカードを取り出すまで繰り返す. 取り出された 3 枚のカードに書かれた数の最大値を X とする.

また, 1 から N までの数字が 1 つずつ書かれた N 枚のカードを袋に入れ、「無作為に 1 枚のカードを取り出してはそれに書かれた数を記録し, 袋に戻す」という作業を 3 回行い, 記録された数の最大値を Y とする. n を N 以下の自然数とする. $X = n$ となる確率を p_n とし, $Y = n$ となる確率を q_n とする.

次の問いに答えよ.

(1) p_3, q_1, q_2, q_3 を求めよ.(2) p_n と q_n を求めよ.(1) $X = 3$ となるのは, $\{1, 2, 3\}$ を取り出したときなので,

$$p_3 = \frac{1}{N C_3} = \frac{6}{N(N-1)(N-2)} //$$

$Y = 1$ となるのは, $(1, 1, 1)$ のときなので, $q_1 = \left(\frac{1}{N}\right)^3 = \frac{1}{N^3} //$

← 最大値が 2 以下

$$q_2 = \left(\frac{2}{N}\right)^3 - q_1$$

$$= \frac{8}{N^3} - \frac{1}{N^3} \quad \therefore q_2 = \frac{7}{N^3} //$$

同様に, $q_3 = \left(\frac{3}{N}\right)^3 - \left(\frac{2}{N}\right)^3 \quad \therefore q_3 = \frac{19}{N^3} //$

(2) $X = n$ となるのは, 1 枚が n で残り 2 枚が $n-1$ 以下のとき.

$$\therefore p_n = \frac{n-1 C_2}{N C_3} = \frac{3(n-1)(n-2)}{N(N-1)(N-2)} //$$

$$q_n = \left(\frac{n}{N}\right)^3 - \left(\frac{n-1}{N}\right)^3 = \frac{3n^2 - 3n + 1}{N^3} //$$