藤田保健衛生大学

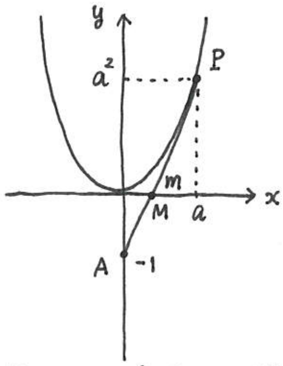
2014年 医学部 第1問

$\boxed{1}$ 点 A$(0,\ -1)$ とする．放物線 $y=x^2$ 上の点 P$(a,\ a^2)$ に対し，直線 AP と x 軸との共有点を M$(m,\ 0)$ とし，M を P の対応点と呼ぶことにする．

(1) m を a で表すと $m=\boxed{\ 1\ }$ である．　$\dfrac{a}{a^2+1}$

(2) m の値のとり得る範囲は $\boxed{\ 2\ }$ である．　$-\dfrac{1}{2} \leqq m \leqq \dfrac{1}{2}$

(3) $a \neq \boxed{\ 3\ }$ のとき，P$(a,\ a^2)$ と同じ対応点をもつ P と異なる放物線 $y=x^2$ 上の点 Q が存在し，Q の座標は $\boxed{\ 4\ }$ である．　$0, \pm 1$　$\left(\dfrac{1}{a},\ \dfrac{1}{a^2}\right)$



(1) 直線AP : $y=\dfrac{a^2+1}{a-0}x-1$ より

$0=\dfrac{a^2+1}{a}\cdot m-1$ を解いて，$m=\dfrac{a}{a^2+1}$ //

(2) 図形は y 軸に対称であるから，まず $a>0$ のときを考える

$m=\dfrac{1}{a+\frac{1}{a}}$ であり，(分母) $=a+\dfrac{1}{a} \geqq 2\sqrt{a\cdot\dfrac{1}{a}}=2$ (相加・相乗平均の関係)

$\therefore\ 0<m\leqq\dfrac{1}{2}$

また，$a=0$ のとき，$m=0$ と $a<0$ のときを考えると，$-\dfrac{1}{2}\leqq m\leqq\dfrac{1}{2}$ //

(3) Q$(b,\ b^2)$ とおくと．$(a\neq b)$

$\dfrac{a}{a^2+1}=\dfrac{b}{b^2+1} \iff ab^2+a-a^2b-b=0$

$\iff (1-ab)(a-b)=0$

$a\neq b$ より，$ab=1$ かつ $a\neq 0, \pm 1$

$\therefore$ $a\neq 0, \pm 1$ のとき，Q は $\left(\dfrac{1}{a},\ \dfrac{1}{a^2}\right)$ //