愛知教育大学

2013年 第3問

数理 石井K

$\boxed{3}$ nを正の整数とし，整式$P(x)=x^{3n}+(3n-2)x^{2n}+(2n-3)x^n-n^2$を考える．以下の問いに答えよ．

(1) $P(x)$をx^2-1で割った余りを求めよ．

(2) $P(x)$がx^2-1で割り切れるようなnの値をすべて求めよ．

(1) 2次式で割ると余りは1次以下の式になるので

$P(x)=(x^2-1)Q(x)+ax+b$と表せる．

$$\therefore P(1)=1^{3n}+(3n-2)\cdot 1^{2n}+(2n-3)\cdot 1^n-n^2$$

$$=-n^2+5n-4 \qquad \therefore -n^2+5n-4=a+b \cdots ①$$

$$P(-1)=(-1)^{3n}+(3n-2)\cdot(-1)^{2n}+(2n-3)\cdot(-1)^n-n^2$$

$$=(-1)^n+3n-2+(2n-3)\cdot(-1)^n-n^2$$

$(-1)^{3n}=(-1)^{2n}\cdot(-1)^n$
$=(-1)^n$

$$=-n^2+(2n-2)\cdot(-1)^n+3n-2$$

$$\therefore -n^2+(2n-2)\cdot(-1)^n+3n-2=-a+b \cdots ②$$

①+②より．$2b=-2n^2+(2n-2)\cdot(-1)^n+8n-6$

$$\therefore b=-n^2+(n-1)\cdot(-1)^n+4n-3$$

①−②より　$2a=2n-2-(2n-2)\cdot(-1)^n$

$$\therefore a=n-1-(n-1)\cdot(-1)^n$$

nの偶奇で分けて書いてもよい

$\therefore$ 余りは．$\underline{\{n-1-(n-1)\cdot(-1)^n\}x-n^2+(n-1)\cdot(-1)^n+4n-3}$ //

(2) (1)より．

$$\begin{cases} n-1-(n-1)\cdot(-1)^n=0 & \cdots ③ \\ -n^2+(n-1)\cdot(-1)^n+4n-3=0 & \cdots ④ \end{cases}$$

③+④より．$-n^2+5n-4=0$　$(n-4)(n-1)=0$　$\therefore n=1, 4$

どちらの場合も③，④をみたすので，$\underline{n=1, 4}$ //

必要条件にしかなってないので調べる必要がある！