2016年 医学部 第3問

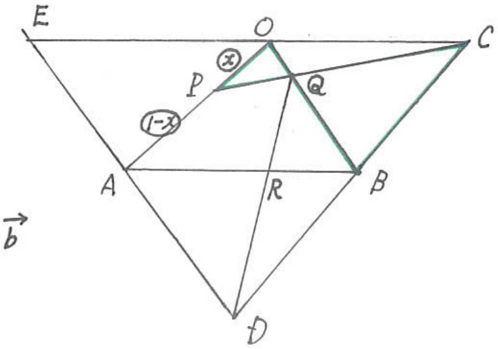
$\boxed{3}$ 一直線上にない3点O，A，Bがあり，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とする．また，$\overrightarrow{OC}=\vec{b}-\vec{a}$，$\overrightarrow{OD}=\vec{a}+\vec{b}$，$\overrightarrow{OE}=\vec{a}-\vec{b}$ を満たすように点C，D，Eをとる．$0<x<1$ を満たす実数 x に対し，線分OAを $x:(1-x)$ に内分する点をP，直線PCと直線OBとの交点をQ，直線QDと直線ABとの交点をRとするとき，以下の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{OQ}$ を，x，$\vec{b}$ を用いて表せ．

(2) $\overrightarrow{OR}$ を，x，$\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ．

(3) 直線REと直線OAとの交点がPと一致するとき，x の値を求めよ．

(4) x を(3)で求めた値とする．$OA=OB=1$，$\angle AOB=\frac{\pi}{3}$ のとき，PQ^2 の値を求めよ．



(1) $\triangle OPQ \backsim \triangle BCQ$ で相似比は $x:1$

$\therefore OQ:QB=x:1$

$\therefore \overrightarrow{OQ}=\frac{x}{x+1}\vec{b}$ //

(2) $\overrightarrow{OD}=\vec{a}+\vec{b}$ より，$\overrightarrow{QD}=\vec{a}+\vec{b}-\frac{x}{x+1}\vec{b}=\vec{a}+\frac{1}{x+1}\vec{b}$

$\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OQ}+k\overrightarrow{QD}$ と表せるので

$$\overrightarrow{OR}=\frac{x}{x+1}\vec{b}+k\left(\vec{a}+\frac{1}{x+1}\vec{b}\right)$$

$$=k\vec{a}+\frac{x+k}{x+1}\vec{b}$$

点Rは直線AB上にあるので，$k+\frac{x+k}{x+1}=1$ $\therefore k=\frac{1}{x+2}$

$\therefore \overrightarrow{OR}=\frac{1}{x+2}\vec{a}+\frac{x+1}{x+2}\vec{b}$ //

(3) 3点E，P，Rが1直線上にあるので，$\overrightarrow{PE}=l\overrightarrow{PR}$ (l：実数) となる l が存在する．

$\therefore \vec{a}-\vec{b}-x\vec{a}=l\left(\frac{1}{x+2}\vec{a}+\frac{x+1}{x+2}\vec{b}-x\vec{a}\right)$

$(1-x)\vec{a}-\vec{b}=\frac{1-x^2-2x}{x+2}l\vec{a}+\frac{x+1}{x+2}l\vec{b}$

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は1次独立より，$1-x=\frac{1-x^2-2x}{x+2}l$ かつ $-1=\frac{x+1}{x+2}l$ これを解いて，$x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ //

(4) $OP=x$，$OQ=\frac{x}{x+1}$ ∴余弦定理より

$PQ^2=x^2+\left(\frac{x}{x+1}\right)^2-2\cdot\frac{x^2}{x+1}\cdot\frac{1}{2}=\frac{x^2(x^2+x+1)}{(x+1)^2}$ $x^2+x-1=0$ を使って，$PQ^2=7-3\sqrt{5}$ //