福井大学

2014年 医学部 第2問

数理 石井K

$\boxed{2}$ 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ がある.

$$a_1 = 2,\quad 3a_{n+1} - 4a_n + 1 = 0 \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

このとき，以下の問いに答えよ.

(1) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ.

(2) $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ の小数部分を b_n とおくとき，数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ.

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{b_k}$ を求めよ.

(1). $3(a_{n+1} - 1) = 4(a_n - 1)$ $\quad \therefore a_{n+1} - 1 = \frac{4}{3}(a_n - 1)$

$\therefore$ 数列 $\{a_n - 1\}$ は 初項 $a_1 - 1 = 1$，公比 $\frac{4}{3}$ の等比数列

$\therefore a_n - 1 = \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$ $\quad \therefore \underline{a_n = \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} + 1}$ //

(2) $$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(\frac{4}{3}\right)^n + 1}{\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} + 1} = \frac{\frac{4^n}{3} + 3^{n-1}}{4^{n-1} + 3^{n-1}} = \frac{4^n + 3^n}{3\cdot 4^{n-1} + 3^n} = \frac{3\cdot 4^{n-1} + 3^n + 4^{n-1}}{3\cdot 4^{n-1} + 3^n}$$

$$\therefore \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 + \underbrace{\frac{4^{n-1}}{3\cdot 4^{n-1} + 3^n}}_{(分子)<(分母)} \qquad \therefore \underline{b_n = \frac{4^{n-1}}{3\cdot 4^{n-1} + 3^n}} \ //$$

(3) $$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{b_k} = \sum_{k=1}^{n} 3 + \frac{3^k}{4^{k-1}} = \sum_{k=1}^{n} 3 + 4\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^k$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{b_k} = 3n + 4\cdot\frac{\frac{3}{4}\left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n\right)}{1 - \frac{3}{4}}$$

$$= 3n + 4\cdot 3\left\{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n\right\}$$

$$= \underline{3n + 12 - \frac{3^{n+1}}{4^{n-1}}} \ //$$