0001856903418999

福井大学

2014 年 第 5 問

数理 石井K

$\boxed{5}$ O を原点とする座標平面上に点 A(2, 0) と放物線 $C : y = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 6$ があり，C 上の点で x 座標が t と $2t$ であるものをそれぞれ P，Q とおく．このとき，以下の問いに答えよ．ただし $t > 0$ とする．

(1) 3 点 A，P，Q が一直線上にあるときの t の値を t_0 とおく．t_0 の値を求めよ．

(2) $t = t_0$ のとき，△OAQ の周および内部と，不等式 $y \geqq \frac{1}{2}x^2 - 3x + 6$ の表す領域との共通部分の面積を求めよ．

(3) $0 < t < t_0$ を満たす t に対して，△APQ の面積を $S(t)$ とおくとき，$S(t)$ の最大値とそのときの t の値を求めよ．

(1) $P(t, \frac{1}{2}t^2 - 3t + 6)$，$Q(2t, 2t^2 - 6t + 6)$ より．

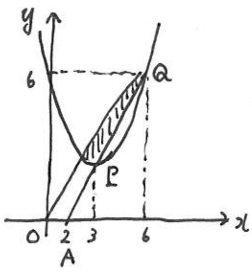
$$PQ : y = \frac{\frac{3}{2}t^2 - 3t}{t}(x - t) + \frac{1}{2}t^2 - 3t + 6$$

$$\therefore PQ : y = \left(\frac{3}{2}t - 3\right)x - t^2 + 6$$

これが A(2, 0) を通るので，$0 = \left(\frac{3}{2}t - 3\right)\cdot 2 - t^2 + 6$

$\therefore t(t-3) = 0$　$t > 0$ より $\underline{t_0 = 3}$ //

(2)



OQ と C の交点の x 座標を求めると

Q(6, 6) より　OQ : $y = x$

$\frac{1}{2}x^2 - 4x + 6 = 0$

$\therefore x^2 - 8x + 12 = 0$

$(x-2)(x-6) = 0$　$\therefore x = 2, 6$

$$S = \int_2^3 x - \frac{1}{2}x^2 + 3x - 6\,dx + \int_3^6 x - \frac{3}{2}x + 3\,dx$$

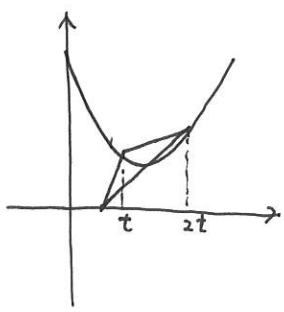
$$= \left[-\frac{x^3}{6} + 2x^2 - 6x\right]_2^3 + \left[-\frac{x^2}{4} + 3x\right]_3^6$$

$$= -\frac{9}{2} + 18 - 18 + \frac{4}{3} - 8 + 12 - 9 + 18 + \frac{9}{4} - 9$$

$$= \underline{\frac{37}{12}} \text{ //}$$

(3) $S(t) = \frac{1}{2}\left|(t-2)(2t^2 - 6t + 6) - (2t-2)\left(\frac{1}{2}t^2 - 3t + 6\right)\right|$

$= \frac{t^2}{2}|t - 3|$　$0 < t < 3$ より $S(t) = \frac{t^2}{2}(3 - t)$



$S'(t) = \frac{3}{2}t(2 - t)$

t	(0)	$\cdots$	2	$\cdots$	(3)
S'		+	0	−	
S	(0)	↗	2	↘	(0)

$\therefore$ $\underline{\text{最大値 } 2\ (t = 2 \text{ のとき})}$ //