2016年 工学部 第2問　1枚目/2枚

$\boxed{2}$ 四面体OABCにおいて，辺OA，OB，OCのどの2辺も互いに直交し，長さがすべて1である．3点O，B，Cを通る平面上に点Dを

$$\mathrm{OD}=1,\quad 0^\circ<\angle\mathrm{BOD}<90^\circ,\quad 0^\circ<\angle\mathrm{COD}<90^\circ$$

となるようにとり，$\angle\mathrm{BOD}=\theta$，$\cos\theta=x$とおく．線分ABを$(x+2):x$に外分する点をE，線分ACを$x:(1-x)$に内分する点をF，三角形DEFの重心をGとする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$とおくとき，以下の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$を，$x$，$\vec{b}$，$\vec{c}$を用いて表せ．また，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}$を，$x$，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$を用いて表せ．

(2) 点Gが3点O，B，Cを通る平面上にあるようなxの値を求めよ．

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OG}}$と$\overrightarrow{\mathrm{DF}}$の内積の最小値と，そのときの$x$の値を求めよ．

(1) 点Dは3点O，B，Cを通る平面上にあることから

$\overrightarrow{OD}=p\vec{b}+q\vec{c}$ （p，qは実数）と表せる．

$|\overrightarrow{OD}|=1$ より．$|\overrightarrow{OD}|^2=p^2|\vec{b}|^2+2pq\,\vec{b}\cdot\vec{c}+q^2|\vec{c}|^2=1$

$|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$，$\vec{b}\cdot\vec{c}=0$ より．$p^2+q^2=1$ …①

$\cos\theta=\dfrac{\vec{b}\cdot\overrightarrow{OD}}{|\vec{b}||\overrightarrow{OD}|}$ より．$x=p$ …②

①②より．$q^2=1-x^2$

$0^\circ<\angle BOD<90^\circ$，$0^\circ<\angle COD<90^\circ$ より．$q>0$　よって．$q=\sqrt{1-x^2}$

よって．$\underline{\overrightarrow{OD}=x\vec{b}+\sqrt{1-x^2}\,\vec{c}}$ //

$\overrightarrow{AE}=\dfrac{x+2}{2}\overrightarrow{AB}$ より．$\overrightarrow{OE}=-\dfrac{x}{2}\vec{a}+\dfrac{x+2}{2}\vec{b}$

$\overrightarrow{OF}=(1-x)\vec{a}+x\vec{c}$

$\therefore\ \overrightarrow{OG}=\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF})$

$\quad=\underline{\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{x}{2}\right)\vec{a}+\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{3}\right)\vec{b}+\dfrac{\sqrt{1-x^2}+x}{3}\vec{c}}$ //

(2) $\overrightarrow{OG}=k\vec{b}+l\vec{c}$ （k，lは実数）と表せるから

$\dfrac{1}{3}-\dfrac{x}{2}=0$　　$\therefore\ \underline{x=\dfrac{2}{3}}$ //

2枚目へつづく

2016年 工学部 第2問　　2枚目/2枚

数理 石井K

$\boxed{2}$ 四面体OABCにおいて，辺OA，OB，OCのどの2辺も互いに直交し，長さがすべて1である．3点O，B，Cを通る平面上に点Dを

$$\mathrm{OD}=1,\quad 0^\circ<\angle\mathrm{BOD}<90^\circ,\quad 0^\circ<\angle\mathrm{COD}<90^\circ$$

となるようにとり，$\angle\mathrm{BOD}=\theta$，$\cos\theta=x$とおく．線分ABを$(x+2):x$に外分する点をE，線分ACを$x:(1-x)$に内分する点をF，三角形DEFの重心をGとする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$とおくとき，以下の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$を，$x$，$\vec{b}$，$\vec{c}$を用いて表せ．また，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}$を，$x$，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$を用いて表せ．

(2) 点Gが3点O，B，Cを通る平面上にあるようなxの値を求めよ．

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OG}}$と$\overrightarrow{\mathrm{DF}}$の内積の最小値と，そのときの$x$の値を求めよ．

(3) $\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{OF}-\overrightarrow{OD}$

$=(1-x)\vec{a}-x\vec{b}+(x-\sqrt{1-x^2})\vec{c}$

$\therefore\ \overrightarrow{OG}\cdot\overrightarrow{DF}=\left\{\left(\frac{1}{3}-\frac{x}{2}\right)\vec{a}+\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{3}\right)\vec{b}+\frac{\sqrt{1-x^2}+x}{3}\vec{c}\right\}\cdot\left\{(1-x)\vec{a}-x\vec{b}+(x-\sqrt{1-x^2})\vec{c}\right\}$

$=\left(\frac{1}{3}-\frac{x}{2}\right)(1-x)-x\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{3}(x+\sqrt{1-x^2})(x-\sqrt{1-x^2})$

$=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}x-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}(2x^2-1)$

$=\frac{2}{3}x^2-\frac{7}{6}x$

$=\frac{2}{3}\left(x^2-\frac{7}{4}x\right)$

$=\frac{2}{3}\left(x-\frac{7}{8}\right)^2-\frac{49}{96}$

$\therefore$ 最小値 $-\frac{49}{96}$ $\left(x=\frac{7}{8}\text{のとき}\right)$ //