0002333636667999

福井大学

2016年 医学部 第4問　1枚目/2枚

数理 石井K

$\boxed{4}$ 表の出る確率が r，裏の出る確率が $1-r$ であるコインがある．このコインを繰り返し投げ，表の出た回数と裏の出た回数の差の絶対値が2になったときにコイン投げを終了する．ちょうど $2n$ 回で終了する確率を p_n とし，$2n$ 回以下で終了する確率を q_n とする．ただし，n は正の整数とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) p_n を求めよ．

(2) 無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} np_n$ の和を求めよ．ただし，$0 \leqq s < 1$ に対して $\lim_{n\to\infty} ns^n = 0$ であることを用いてもよい．

(3) $r = \frac{1}{4}$ のとき，$q_n \geqq 0.999$ となる最小の n を求めよ．必要であれば，$\log_{10} 2 = 0.3010$，$\log_{10} 3 = 0.4771$ として計算せよ．

(1) 2回ずつを組にして考えると，

ここでおわる.

$$\underbrace{おう\ または\ うお}_{1,2回目}\quad \underbrace{おう\ または\ うお}_{3,4回目}\quad \cdots\quad \underbrace{おう\ または\ うお}_{}\quad \underbrace{おお\ または\ うう}_{2n-1,\ 2n回目}$$

よって，$p_n = \{r(1-r)\cdot 2\}^{n-1}\cdot\{r^2+(1-r)^2\}$

$= \underline{(2r^2-2r+1)\cdot\{2r(1-r)\}^{n-1}}$ //

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} np_n = (2r^2-2r+1)\sum_{n=1}^{\infty} ns^{n-1}$　($s=2r(1-r)$ とおいた)

$T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} ks^{k-1}$ とおくと，

$T_n = 1\cdot s^0 + 2\cdot s + 3\cdot s^2 + \cdots + ns^{n-1}$　…①

$sT_n = \qquad 1\cdot s + 2\cdot s^2 + \cdots + (n-1)s^{n-1} + ns^n$　…②

①−②より，$(1-s)T_n = s^0+s^1+s^2+\cdots+s^{n-1}-ns^n$

$0<r<1$ より，$0<s<\frac{1}{2}$ なので $(1-s)T_n = \dfrac{1-s^n}{1-s} - ns^n$

$\therefore\ T_n = \dfrac{1-s^n}{(1-s)^2} - \dfrac{ns^n}{1-s}$

$\lim_{n\to\infty} s^n = 0$，$\lim_{n\to\infty} ns^n = 0$ より，$\lim_{n\to\infty} T_n = \dfrac{1}{(1-s)^2}$

$\therefore\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} np_n = \frac{2r^2-2r+1}{(1-s)^2}$

$= \underline{\dfrac{1}{1-2r+2r^2}}$ //

2枚目へつづく

福井大学

2016年 医学部 第4問　2枚目/2枚　数理 石井K

$\boxed{4}$ 表の出る確率が r，裏の出る確率が $1-r$ であるコインがある．このコインを繰り返し投げ，表の出た回数と裏の出た回数の差の絶対値が2になったときにコイン投げを終了する．ちょうど $2n$ 回で終了する確率を p_n とし，$2n$ 回以下で終了する確率を q_n とする．ただし，n は正の整数とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) p_n を求めよ．

(2) 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} np_n$ の和を求めよ．ただし，$0 \leqq s < 1$ に対して $\displaystyle\lim_{n\to\infty} ns^n = 0$ であることを用いてもよい．

(3) $r = \dfrac{1}{4}$ のとき，$q_n \geqq 0.999$ となる最小の n を求めよ．必要であれば，$\log_{10} 2 = 0.3010$，$\log_{10} 3 = 0.4771$ として計算せよ．

(3) 奇数回目で終了することはないから，

$$q_n = \sum_{k=1}^{n} p_k$$
$$= \sum_{k=1}^{n} (2r^2-2r+1)\cdot\{2r(1-r)\}^{k-1}$$

$r=\frac{1}{4}$ を代入して，

$$q_n = \frac{5}{8}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{3}{8}\right)^{k-1}$$
$$= \frac{5}{8}\cdot\frac{1-\left(\frac{3}{8}\right)^n}{1-\frac{3}{8}}$$
$$= 1-\left(\frac{3}{8}\right)^n$$

$$\therefore q_n \geqq 0.999 \iff \left(\frac{3}{8}\right)^n \leqq 0.001$$

対数をとって．$n\log_{10}\frac{3}{8} \leqq -3$

$$\therefore n(\log_{10}3 - 3\log_{10}2) \leqq -3$$

$$\therefore 0.4259n \geqq 3$$

$$\therefore n \geqq \frac{3}{0.4259} \fallingdotseq 7.044$$

$$\therefore \underline{n=8}$$ //