

2016年 医学部 第4問

1枚目/2枚

数理
石井

4 表の出る確率が r 、裏の出る確率が $1-r$ であるコインがある。このコインを繰り返し投げ、表の出た回数と裏の出た回数の差の絶対値が 2 になったときにコイン投げを終了する。ちょうど $2n$ 回で終了する確率を p_n とし、 $2n$ 回以下で終了する確率を q_n とする。ただし、 n は正の整数とする。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) p_n を求めよ。
 (2) 無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} n p_n$ の和を求めよ。ただし、 $0 \leq s < 1$ に対して $\lim_{n \rightarrow \infty} n s^n = 0$ であることを用いてもよい。
 (3) $r = \frac{1}{4}$ のとき、 $q_n \geq 0.999$ となる最小の n を求めよ。必要であれば、 $\log_{10} 2 = 0.3010$ 、 $\log_{10} 3 = 0.4771$ として計算せよ。

(1) 2回ずつを組にして考えると、



$$\begin{aligned} \text{よって, } p_n &= \{r(1-r) \cdot 2\}^{n-1} \cdot \{r^2 + (1-r)^2\} \\ &= \frac{(2r^2 - 2r + 1) \cdot \{2r(1-r)\}^{n-1}}{\quad} \end{aligned}$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} n p_n = (2r^2 - 2r + 1) \sum_{n=1}^{\infty} n s^{n-1} \quad (s = 2r(1-r) \text{ とおいた})$$

$$T_n = \sum_{k=1}^n k s^{k-1} \text{ とおくと,}$$

$$T_n = 1 \cdot s^0 + 2 \cdot s + 3 \cdot s^2 + \dots + n s^{n-1} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$s T_n = 1 \cdot s + 2 \cdot s^2 + \dots + (n-1) s^{n-1} + n s^n \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} \text{ より, } (1-s) T_n = s^0 + s^1 + s^2 + \dots + s^{n-1} - n s^n$$

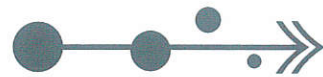
$$0 < r < 1 \text{ より, } 0 < s < \frac{1}{2} \text{ なので } (1-s) T_n = \frac{1-s^n}{1-s} - n s^n$$

$$\therefore T_n = \frac{1-s^n}{(1-s)^2} - \frac{n s^n}{1-s}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s^n = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} n s^n = 0 \text{ より, } \lim_{n \rightarrow \infty} T_n = \frac{1}{(1-s)^2}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{n=1}^{\infty} n p_n &= \frac{2r^2 - 2r + 1}{(1-s)^2} \\ &= \frac{1}{1 - 2r + 2r^2} \end{aligned}$$

2枚目ハツク



2016年医学部第4問

2回目/2枚



4 表の出る確率が r 、裏の出る確率が $1-r$ であるコインがある。このコインを繰り返し投げ、表の出た回数と裏の出た回数の差の絶対値が 2 になったときにコイン投げを終了する。ちょうど $2n$ 回で終了する確率を p_n とし、 $2n$ 回以下で終了する確率を q_n とする。ただし、 n は正の整数とする。このとき、以下の問いに答えよ。

(1) p_n を求めよ。

(2) 無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} n p_n$ の和を求めよ。ただし、 $0 \leq s < 1$ に対して $\lim_{n \rightarrow \infty} n s^n = 0$ であることを用いてもよい。

(3) $r = \frac{1}{4}$ のとき、 $q_n \geq 0.999$ となる最小の n を求めよ。必要であれば、 $\log_{10} 2 = 0.3010$ 、 $\log_{10} 3 = 0.4771$ として計算せよ。

(3) 奇数回目で終了することはないから、

$$\begin{aligned} q_n &= \sum_{k=1}^n P_k \\ &= \sum_{k=1}^n (2r^2 - 2r + 1) \cdot \{2r(1-r)\}^{k-1} \end{aligned}$$

$r = \frac{1}{4}$ を代入して、

$$\begin{aligned} q_n &= \frac{5}{8} \sum_{k=1}^n \left(\frac{3}{8}\right)^{k-1} \\ &= \frac{5}{8} \cdot \frac{1 - \left(\frac{3}{8}\right)^n}{1 - \frac{3}{8}} \\ &= 1 - \left(\frac{3}{8}\right)^n \end{aligned}$$

$$\therefore q_n \geq 0.999 \iff \left(\frac{3}{8}\right)^n \leq 0.001$$

$$\text{対数をとって、} \quad n \log_{10} \frac{3}{8} \leq -3$$

$$\therefore n (\log_{10} 3 - 3 \log_{10} 2) \leq -3$$

$$\therefore 0.4259 n \geq 3$$

$$\therefore n \geq \frac{3}{0.4259} \doteq 7.044$$

$$\therefore \underline{n=8}$$