福井大学

2016年 医学部 第1問

数理 石井K

$\boxed{1}$ 関数 $f(x)=e^x+e^{-x}$ があり，$g(x)=f'(x)$，$h(x)=xf(x)$ とおく．a を実数として，点 $\mathrm{P}(a,\ f(a))$ における曲線 $y=f(x)$ の法線を ℓ とし，点 $\mathrm{Q}(a,\ g(a))$ における曲線 $y=g(x)$ の法線を m とする．ℓ と m との交点を R とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) R の座標を，a を用いて表せ．

(2) $\mathrm{PR}^2-\mathrm{QR}^2$ の値を求めよ．

(3) 2つの曲線 $y=g(x)$，$y=h(x)$ および直線 $x=1$ によって囲まれた図形を，x 軸の周りに1回転させてできる立体の体積 V を求めよ．

(1) $f'(x)=e^x-e^{-x}$

$\therefore\ \ell:\ y=-\dfrac{1}{e^a-e^{-a}}(x-a)+e^a+e^{-a}\ \cdots①$

$g'(x)=f''(x)=e^x+e^{-x}$

$\therefore\ m:\ y=-\dfrac{1}{e^a+e^{-a}}(x-a)+e^a-e^{-a}\cdots②$

①−②より，$(x-a)\left(-\dfrac{1}{e^a-e^{-a}}+\dfrac{1}{e^a+e^{-a}}\right)+2e^{-a}=0$

これを解いて，$x=a+e^{2a}-e^{-2a}$　そのとき①に代入して，$y=0$

$\therefore\ \underline{\mathrm{R}(a+e^{2a}-e^{-2a},\ 0)}$ //

(2) $\mathrm{PR}^2-\mathrm{QR}^2=(-e^{2a}+e^{-2a})^2+(e^a+e^{-a})^2-(-e^{2a}+e^{-2a})^2-(e^a-e^{-a})^2$

$=\underline{4}$ //

(3) $g(x)=e^x-e^{-x}$，$h(x)=x(e^x+e^{-x})$ より $g(0)=h(0)=0$，また，$0\leqq x\leqq 1$ において，$g(x)\geqq 0$，$h(x)\geqq 0$

$F(x)=h(x)-g(x)$ とおくと，$F'(x)=h'(x)-g'(x)=x(e^x-e^{-x})=\dfrac{x(e^x+1)(e^x-1)}{e^x}$

$\therefore\ 0\leqq x\leqq 1$ において，$F'(x)\geqq 0$　$\therefore\ F(x)\geqq F(0)=0$　$\therefore\ g(x)\leqq h(x)\quad(0\leqq x\leqq 1)$

$\therefore\ V=\pi\displaystyle\int_0^1\{h(x)\}^2-\{g(x)\}^2\,dx$

$=\pi\displaystyle\int_0^1(x^2-1)(e^{2x}+e^{-2x})+2x^2+2\,dx$

$=\pi\left\{\left[(x^2-1)\cdot\frac{1}{2}(e^{2x}-e^{-2x})\right]_0^1-\displaystyle\int_0^1 x(e^{2x}-e^{-2x})\,dx+\left[\frac{2}{3}x^3+2x\right]_0^1\right\}$

$=\underline{\left(-\dfrac{e^2}{4}-\dfrac{3}{4e^2}+\dfrac{8}{3}\right)\pi}$ //　計算略（部分積分をくり返す）