2013年 法学部 第3問

数理 石井K

$\boxed{3}$ $\vec{a}$，$\vec{b}$ はともに平面上の長さ1のベクトルで，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{1}{2}$ を満たすとする．ただし，$\vec{a}\cdot\vec{b}$ は内積を表す．

(1) ベクトル $\vec{a}+2\vec{b}$ の長さ $|\vec{a}+2\vec{b}|$ を求めよ．

(2) 内積

$$\left(\vec{c}+\vec{a}\right)\cdot\left(\vec{c}+2\vec{b}\right)$$

を最大にする長さ1のベクトル $\vec{c}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表せ．また，その最大値を求めよ．

(1) $|\vec{a}+2\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2$

$=1+4\cdot\frac{1}{2}+4$

$=7$

$\therefore\ \underline{|\vec{a}+2\vec{b}|=\sqrt{7}}$ //

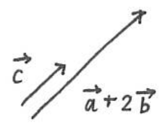
(2) $(\vec{c}+\vec{a})\cdot(\vec{c}+2\vec{b})=|\vec{c}|^2+\vec{c}\cdot(\vec{a}+2\vec{b})+2\vec{a}\cdot\vec{b}$

$=2+|\vec{c}||\vec{a}+2\vec{b}|\cdot\cos\theta$　($\vec{c}$ と $\vec{a}+2\vec{b}$ のなす角を θ とおいた)

$=2+\sqrt{7}\cos\theta$

$\therefore$ この内積の値が最大となるのは $\theta=0$ のときであり，$|\vec{c}|=1$ であるから，

$$\vec{c}=\frac{\vec{a}+2\vec{b}}{|\vec{a}+2\vec{b}|}=\underline{\frac{1}{\sqrt{7}}\vec{a}+\frac{2}{\sqrt{7}}\vec{b}}\ //$$



このとき，最大値は，$\underline{2+\sqrt{7}}$ //