

2014年理系2第6問

6 原点Oを通り、曲線  $y = 2 + 2\log x$  に接する直線を  $l$  とし、その接点を A とする。また、この曲線と直線  $l$ 、および  $x$  軸で囲まれた図形を  $D$  とする。

- (1) この曲線と  $x$  軸との交点の  $x$  座標は  $\frac{\text{ア}}{e}$  である。  
 (2) 接点 A の座標は  $(\text{イ}, \text{ウ})$  である。  
 (3) 図形  $D$  の面積は  $\text{エ} - \frac{\text{オ}}{e}$  である。  
 (4) 図形  $D$  を  $x$  軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積は  $\frac{\text{カ}}{\text{ク}} \left( \frac{\text{キ}}{e} - e \right) \pi$  である。

$$(1) 0 = 2 + 2 \log x \quad \therefore x = \frac{1}{e}$$

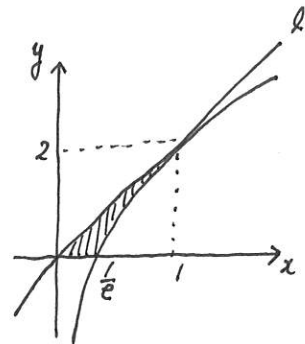
$$(2) y' = \frac{2}{x}, \quad \text{接点 } \Sigma (t, 2 + 2 \log t) \text{ とおくと}$$

$$l: y = \frac{2}{t}(x - t) + 2 + 2 \log t \quad \text{これが原点を通るので } 0 = 2 \log t$$

$$\therefore t = 1 \text{ となり } A(1, 2)$$

$$(3) (2) \text{ より } l: y = 2x$$

$$\begin{aligned}
 S &= \int_0^{\frac{1}{e}} 2x \, dx + \int_{\frac{1}{e}}^1 (2x - 2 - 2 \log x) \, dx \\
 &= \int_0^1 2x \, dx - \int_{\frac{1}{e}}^1 2 \, dx - 2 \int_{\frac{1}{e}}^1 \log x \, dx \\
 &= [x^2]_0^1 - [2x]_{\frac{1}{e}}^1 - 2 [x \log x]_{\frac{1}{e}}^1 + 2 \int_{\frac{1}{e}}^1 dx \\
 &= 1 - \frac{2}{e}
 \end{aligned}$$



$$(4) (\text{ア} \text{ ア } 1) - \pi \int_{\frac{1}{e}}^1 (2 + 2 \log x)^2 \, dx$$

$$= \pi \cdot 2^2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{3} - 4\pi \int_{\frac{1}{e}}^1 (1 + 2 \log x + (\log x)^2) \, dx$$

$$= \frac{4}{3} \pi - 4\pi \left(1 - \frac{1}{e}\right) - 8\pi \int_{\frac{1}{e}}^1 (x)' \log x \, dx - 4\pi \int_{\frac{1}{e}}^1 (x)' (\log x)^2 \, dx$$

$$= -\frac{8}{3} \pi + \frac{4}{e} \pi - 8\pi [x \log x]_{\frac{1}{e}}^1 + 8\pi \int_{\frac{1}{e}}^1 dx - 4\pi [x (\log x)^2]_{\frac{1}{e}}^1 + 4\pi \int_{\frac{1}{e}}^1 2 \log x \, dx$$

$$= \frac{8(3-e)}{3e} \pi$$