

2010年第4問

4  $r$ と $\theta$ を $-1 < r < 1$ ,  $0 \leq \theta < 2\pi$ を満たす定数とする. 行列  $A = r \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ ,  $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

に対して, 次の各問に答えよ.

- (1) 行列  $E - A$  は逆行列を持つことを証明し,  $(E - A)^{-1}$  を求めよ.  
 (2) 全ての自然数  $n$  について

$$A^n = r^n \begin{pmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{pmatrix}$$

が成立することを数学的帰納法を用いて証明せよ.

- (3)  $n$  を 2 以上の自然数とする.  $(E + A + \cdots + A^{n-1})(E - A)$  を簡単な式にせよ.  
 (4) 次の極限值を求めよ.

①  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} r^k \cos k\theta$

②  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} r^k \sin k\theta$