

2013年工・情報・環境学部(A)第2問


 数理
石井

2 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が $S_n = 4a_n - n$ を満たしている.

- (1) a_1 を求めよ.
 (2) a_{n+1} を a_n を用いて表せ.
 (3) $b_n = a_n + c$ とおくとき, $\{b_n\}$ が等比数列になるように定数 c の値を決めよ.
 (4) $\{a_n\}$ の一般項を求めよ.

$$(1) a_1 = S_1 = 4a_1 - 1 \quad \therefore 3a_1 = 1 \quad \therefore a_1 = \frac{1}{3}$$

$$(2) a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$$

$$= 4a_{n+1} - (n+1) - 4a_n + n$$

$$\therefore 3a_{n+1} = 4a_n + 1 \quad \therefore a_{n+1} = \frac{4}{3}a_n + \frac{1}{3}$$

$$(3) b_n = a_n + c \Leftrightarrow a_n = b_n - c \quad \text{これを(2)で求めた式に代入して}$$

$$3(b_{n+1} - c) = 4(b_n - c) + 1$$

$$\therefore 3b_{n+1} = 4b_n - c + 1$$

$$\{b_n\} \text{ が等比数列になるので, } c = 1$$

$$(4) (3) \text{ より, } c = 1 \text{ のとき, } b_{n+1} = \frac{4}{3}b_n$$

$$\therefore \{b_n\} \text{ は初項 } a_1 + c = \frac{4}{3}, \text{ 公比 } \frac{4}{3} \text{ の等比数列}$$

$$\therefore b_n = \left(\frac{4}{3}\right)^n$$

$$\therefore a_{n+1} = \left(\frac{4}{3}\right)^n$$

$$\therefore a_n = \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$$