

2013年第2問

2 座標平面上で、原点  $O$  を始点とし第 1 象限の点  $A$  を通る半直線  $OA$  と  $x$  軸の正の向きとのなす角を  $\theta$  ( $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ) とする。点  $B$  は  $x$  軸上にあり、 $|\overrightarrow{OB}| = b$ ,  $|\overrightarrow{OA}| = a$  とする。原点  $O$  から直線  $AB$  に下ろした垂線と直線  $AB$  との交点を  $P$  とする。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1)  $\overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{AB}$  とおく。  $\overrightarrow{OP} = t\overrightarrow{OB} + (1-t)\overrightarrow{OA}$  であることを示し、 $t$  を  $a, b, \theta$  で表せ。
- (2)  $\theta$  を固定し  $b = 1$  とする。点  $P$  が線分  $AB$  上に存在するような  $a$  の値の範囲を求めよ。
- (3) (2) において、 $\triangle OAB$  の面積の最大値を求めよ。
- (4) (2) において、 $\theta = \frac{\pi}{3}$  とする。面積が最大となる  $\triangle OAB$  は直角三角形であることを示せ。