0001524815748999

福岡大学

2013年 理系 第6問

数理 石井K

$\boxed{6}$ 数列 3, 5, 8, 12, 17, 23, … の初項から第 n 項までの和を S_n とすると，$S_n = \boxed{}$ である．また，$T_n = 1+3x^2+5x^4+\cdots+(2n-1)x^{2n-2}$ とする．$n \geqq 2$ のとき，$(1-x^2)^2T_n$ を求めると，$(1-x^2)^2T_n = \boxed{}$ である．

誤植 正しくは 2n−2 乗

$\{a_n\}$ を 3, 5, 8, 12, 17, 23, … とする

階差数列 $\{b_n\}$ は 2, 3, 4, 5, 6, … なので $b_n = n+1$

$$\therefore a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \quad (n \geqq 2)$$

$$= 3 + \sum_{k=1}^{n-1} k+1$$

$$= 3 + \frac{1}{2}(n-1)n + (n-1)$$

$$= \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n + 2$$ これは $n=1$ のときも成り立つ

$$\therefore S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}k^2 + \frac{1}{2}k + 2$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot n(n+1) + 2n$$

$$= \underline{\frac{1}{6}n(n^2+3n+14)}$$ //

$$\begin{array}{lrl} & T_n = & 1 + 3x^2 + 5x^4 + \cdots + (2n-1)x^{2n-2} \\ -) & x^2T_n = & \quad\; x^2 + 3x^4 + \cdots + (2n-3)x^{2n-2} + (2n-1)x^{2n} \\ \hline \end{array}$$

$$(1-x^2)T_n = 1 + 2(x^2 + x^4 + \cdots + x^{2n-2}) - (2n-1)x^{2n}$$

$$= 1 + 2\cdot\frac{x^2(1-x^{2n-2})}{1-x^2} - (2n-1)x^{2n}$$

$$\therefore (1-x^2)^2T_n = (1-x^2) + 2x^2(1-x^{2n-2}) - (2n-1)(1-x^2)x^{2n}$$

$$= \underline{1 + x^2 - (2n+1)x^{2n} + (2n-1)x^{2n+2}}$$ //