# 福岡大学

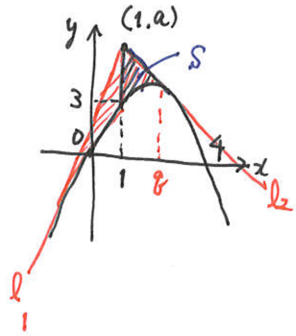
2013年 工・薬学部 第7問

数理 石井K

$\boxed{7}$ $f(x) = -x^2 + 4x$ とする．$a > 3$ のとき，点 $(1,\ a)$ から曲線 $y = f(x)$ に引いた2本の接線の接点を $\mathrm{P}(p,\ f(p))$，$\mathrm{Q}(q,\ f(q))$ $(p < q)$ とし，点Pを通る接線を $\ell_1$，点Qを通る接線を $\ell_2$ とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 接線 $\ell_1$ の傾きを $a$ を用いて表せ．

(2) 2本の接線 $\ell_1$ と $\ell_2$ が直交するとき，曲線 $y = f(x)$ と接線 $\ell_2$ および直線 $x = 1$ で囲まれた図形の面積を求めよ．




(1) $f'(x) = -2x + 4$ より．$f'(p) = -2p + 4$ ・・・①

$\therefore\ \ell_1 : y = (-2p+4)(x-p) + (-p^2+4p)$

$\therefore\ y = (-2p+4)x + p^2$

これが，$(1, a)$ を通るから．$a = p^2 - 2p + 4$

$\therefore\ p^2 - 2p + 4 - a = 0 \quad \therefore\ p = \dfrac{2 \pm \sqrt{4 - 4(4-a)}}{2} = 1 \pm \sqrt{a-3}$

$p < q$ より $p = 1 - \sqrt{a-3}$ ①に代入して

$\ell_1$ の傾きは．$\underline{2 + 2\sqrt{a-3}}$ //

(2) (1)と同様にすると．$\ell_2$ の傾きは．$2 - 2\sqrt{a-3}$

$\ell_1 \perp \ell_2$ より．$(2+2\sqrt{a-3})(2-2\sqrt{a-3}) = -1$

$\therefore\ 4 - 4(a-3) = -1 \quad \therefore\ a = \dfrac{17}{4}$

このとき．$q = 1 + \sqrt{\dfrac{17}{4} - 3} = 1 + \dfrac{\sqrt{5}}{2}$

$\therefore\ S = \displaystyle\int_1^{1+\frac{\sqrt{5}}{2}} (-2q+4)x + q^2 - (-x^2+4x)\,dx$

$= \left[\dfrac{1}{3}(x-q)^3\right]_1^q$

$= \dfrac{1}{3}(q-1)^3$

$= \dfrac{1}{3}\cdot\left(\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)^3$

$= \underline{\dfrac{5\sqrt{5}}{24}}$ //