福岡大学

2015年 理系 第10問

$\boxed{10}$ 関数 $f(x) = \log(1+\sqrt{2+x}) - \frac{1}{2}\sqrt{2+x}$ について，次の問いに答えよ．ただし，対数は自然対数とする．

(1) 関数 $y = f(x)$ の極値を求めよ．

(2) 曲線 $y = f(x)$ および直線 $y = \frac{\log 3 - 1}{4}x + \frac{\log 3 - 1}{2}$ とで囲まれる部分の面積を求めよ．

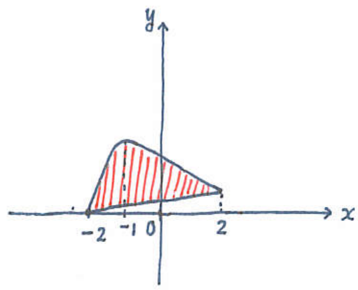
(1) $f'(x) = \frac{1}{1+\sqrt{2+x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2+x}} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{2+x}}$

$= \frac{1-\sqrt{2+x}}{4\sqrt{2+x}\,(1+\sqrt{2+x})}$

x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$	0	$\nearrow$		$\searrow$

$\therefore$ $f'(x) = 0$ となるのは，$x = -1$

$\therefore$ 右の増減表より，極大値は $f(-1) = \log 2 - \frac{1}{2}$ //



(2) $y = f(x)$ のグラフの形から

直線との交点は高々2点であり，

$(-2, 0)$，$(2, \log 3 - 1)$ は交点であるから

$S = \int_{-2}^{2} \log(1+\sqrt{2+x}) - \frac{1}{2}\sqrt{2+x} - \underbrace{\frac{\log 3 - 1}{4}x}_{\text{奇関数}} - \underbrace{\frac{\log 3 - 1}{2}}_{\text{偶関数}}\, dx$

$= \int_{-2}^{2} \log(1+\sqrt{2+x}) - \frac{1}{2}\sqrt{2+x}\, dx - 2\int_{0}^{2} \frac{\log 3 - 1}{2}\, dx$

$t = \sqrt{2+x}$ とおいて置換積分 $\begin{array}{c|c} x & -2 \to 2 \\ \hline t & 0 \to 2 \end{array}$，$dt = \frac{dx}{2\sqrt{2+x}} \iff 2t\,dt = dx$

$\therefore$ $S = \int_0^2 2t\log(1+t)\,dt - \int_0^2 t^2\,dt - 2\cdot\frac{\log 3 - 1}{2}\cdot 2$

$= \int_0^2 (t^2-1)'\log(1+t)\,dt - \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^2 - 2(\log 3 - 1)$

$= \left[(t^2-1)\log(1+t)\right]_0^2 - \int_0^2 t-1\,dt - \frac{8}{3} - 2(\log 3 - 1)$

$= 3\log 3 - \frac{8}{3} - 2\log 3 + 2$ $\therefore$ $S = \log 3 - \frac{2}{3}$ //