

2016年第4問

4 三角形 ABC において、 $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$ 、 $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$ とおき、三角形 ABC の内部に点 P を $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{4}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$ を満たすようにとる。また、直線 AP と直線 BC の交点を D、直線 BP と直線 AC の交点を E、直線 CP と直線 AB の交点を F とする。このとき、以下の問いに答えよ。

(1) \overrightarrow{AD} を \vec{b} 、 \vec{c} を用いて表せ。

(2) 線分の長さの比 $AF : FB$ 、 $AE : EC$ をそれぞれ求めよ。

(3) 次の問いに答えよ。

(i) 点 P が三角形 ABC の垂心であるとする。すなわち、 $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CF}$ かつ $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BE}$ が成り立っている。このとき、 $|\vec{b}| : |\vec{c}|$ および $\cos \angle BAC$ の値を求めよ。

(ii) 点 P が三角形 ABC の外心になることがあるかどうかを調べよ。