

2017年第4問

4 $a_1 = 1$ とする. n を自然数とし, 実数 a_n, a_{n+1} に対して, 次の

$$\text{条件 } (P_n) : (a_{n+1} + a_n)(3a_{n+1} + a_n + 3)(2a_{n+1} - a_n - 3) = 0$$

を考える. 以下の問いに答えよ.

(1) $a_2 < 0$ のとき, 条件 (P_1) をみたす実数 a_2 をすべて求めよ.

(2) $n \geq 2$ とし, $n-1$ 個の実数 $a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n$ が

$$a_k > 0 \quad (k = 2, 3, \dots, n) \quad \text{および} \quad \text{条件 } (P_k) \quad (k = 1, 2, \dots, n-1)$$

をすべてみたすとき, a_n を n を用いて表せ.

(3) 2つの実数 a_n, a_{n+1} が

$$-3 < a_n < 3 \quad \text{および} \quad \text{条件 } (P_n)$$

をみたすとき, $-3 < a_{n+1} < 3$ が成り立つことを示せ.

(4) 3つの実数 a_n, a_{n+1}, a_{n+2} は

$$0 < a_n < 3, \quad a_{n+1} < 0, \quad a_{n+2} > 0 \quad \text{および} \quad \text{条件 } (P_n), (P_{n+1})$$

をすべてみたすとする. このとき, a_{n+2} のとりうるすべての値をそれぞれ a_n の式で表せ.

(5) 49個の実数 $a_2, a_3, \dots, a_{49}, a_{50}$ は, 条件 $(P_1), (P_2), \dots, (P_{49})$ をすべてみたすとする. さらに, $a_2, a_3, \dots, a_{49}, a_{50}$ の中に, 負の実数がただひとつ含まれるとき, a_{50} の最大値を求めよ.