茨城大学

2016年 理学部 第1問

$\boxed{1}$ aを定数とし，関数$f(x)=(x-a)e^{\frac{x^2}{2}}$で表される曲線$y=f(x)$を$C$とする．ただし，$e$は自然対数の底とする．以下の各問に答えよ．

(1) $f(x)$の導関数$f'(x)$を求めよ．

(2) $f(x)$が極値を持たないためにaが満たすべき条件を求めよ．

(3) 曲線C上の点$(t,\ f(t))$における接線の方程式を求めよ．

(4) (3)で求めた接線が原点を通るようなtの値を考える．すべての実数の中で，そのようなtの値が3つあるためにaが満たすべき条件を求めよ．

(1) $f'(x)=1\cdot e^{\frac{x^2}{2}}+(x-a)\cdot xe^{\frac{x^2}{2}}$

$=\underline{(x^2-ax+1)e^{\frac{x^2}{2}}}$ //

(2) x^2-ax+1が異なる2つの実数解をもたなければ．$f(x)$は極値をもたないので

$D=a^2-4\leqq 0$　　$\therefore$ $\underline{-2\leqq a\leqq 2}$ //

(3) $y=f'(t)(x-t)+f(t)$

$\therefore$ $y=(t^2-at+1)e^{\frac{t^2}{2}}(x-t)+(t-a)e^{\frac{t^2}{2}}$

$\underline{y=(t^2-at+1)e^{\frac{t^2}{2}}x-(t^3-at^2+a)e^{\frac{t^2}{2}}}$ //

(4) $0=-(t^3-at^2+a)e^{\frac{t^2}{2}}$

$e^{\frac{t^2}{2}}>0$ より．$t^3-at^2+a=0$

左辺を$g(t)$とおくと．$g'(t)=3t^2-2at=t(3t-2a)$

$\therefore$ $a>0$のとき．増減表は右のようになる．

t	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}a$	$\cdots$
$g'(t)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(t)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

$a>0$のとき．

$a=0$のときは 極値 をもたない

$a<0$のときも考えると．求める条件は．

$g(0)\cdot g(\frac{2}{3}a)<0$　かつ　$a\neq 0$

$\Longleftrightarrow$ $\underline{a<-\frac{3\sqrt{3}}{2},\ \frac{3\sqrt{3}}{2}<a}$ //