

2016年海洋工第1問

1 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を以下で定める.

$$a_1 = 2, \quad b_1 = 1$$

$$\begin{cases} a_{n+1} = 2a_n + 3b_n \\ b_{n+1} = a_n + 2b_n \end{cases} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

(1) $n = 1, 2, 3, \dots$ について,

$$a_n + \sqrt{3}b_n = (2 + \sqrt{3})^n$$

$$a_n - \sqrt{3}b_n = (2 - \sqrt{3})^n$$

が成り立つことを示せ.

(2) $\frac{b_n}{a_n}$ を n を用いて表せ.

(3) 数列 $\{e_n\}$ を

$$e_n = \frac{\sqrt{3}b_n}{a_n} - 1 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定めるとき, $n \geq 3$ ならば

$$|e_n| < 0.001$$

であることを示せ. ただし, $0.071 < \frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} < 0.072$ を用いてもよい.