2012年第2問

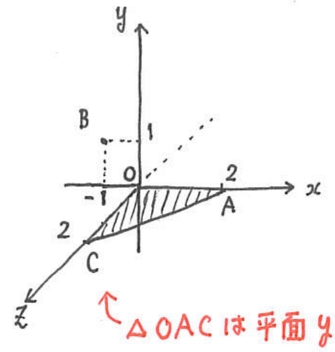
数理 石井K

2 Oを原点とする座標空間に3点A(2, 0, 0), B(−1, 1, 0), C(0, 0, 2)がある．次の各問に答えよ．

(1) 四面体OABCの体積Vを求めよ．

(2) 三角形ABCの面積Sを求めよ．

(3) 3点A, B, Cの定める平面をαとおく．原点Oを中心とする球面と平面αとの共有点が1点だけのとき，その球面の方程式を求めよ．



$\triangle$OACは平面$y=0$上にある．

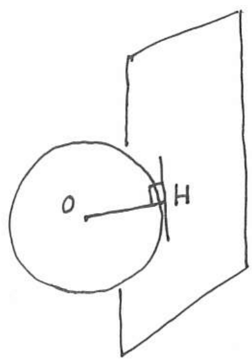
(1) 底面を$\triangle$OACと考えると，高さ1の三角すいなので

$$V = \frac{1}{3} \times \triangle OAC \times 1$$
$$= \frac{1}{3} \times 2 \times 1$$
$$= \underline{\frac{2}{3}}$$

(2) $\overrightarrow{AB} = (-3, 1, 0)$，$\overrightarrow{AC} = (-2, 0, 2)$ より．

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{10}$，$|\overrightarrow{AC}| = 2\sqrt{2}$，$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 6$

$$\therefore S = \frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2}$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{10 \cdot 8 - 6^2}$$
$$= \underline{\sqrt{11}}$$



(3) Oからαに下ろした垂線とαの交点をHとおくと．

球の半径はOHに等しい．Hはα上にあるので

$$\overrightarrow{AH} = s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC}$$
$$= (-3s-2t, s, 2t) \text{ と表される．}$$

$$\therefore \overrightarrow{OH} = (2-3s-2t, s, 2t)$$

$$\overrightarrow{OH} \perp \alpha \iff \overrightarrow{OH} \perp \overrightarrow{AB} \text{ かつ } \overrightarrow{OH} \perp \overrightarrow{AC}$$

$\therefore \overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{AB} = -6+9s+6t+s = 0$　　$\therefore 5s+3t = 3 \cdots ①$

$\overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{AC} = -4+6s+4t+4t = 0$　　$\therefore 3s+4t = 2 \cdots ②$

①，②より．$11s = 6$　$\therefore s = \frac{6}{11}$，$t = \frac{1}{11}$　　$\therefore \overrightarrow{OH} = \left(\frac{2}{11}, \frac{6}{11}, \frac{2}{11}\right)$　$\therefore |\overrightarrow{OH}| = \frac{2\sqrt{11}}{11}$

$$\therefore \underline{x^2+y^2+z^2 = \frac{4}{11}}$$