2015年 経済学部 第4問

4 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が

$$S_n = n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n$$

で表されるとする．

(1) 数列 $\{a_n\}$ の一般項が $a_n = 4n(n+1)(n+2)$ であることを示しなさい．

(2) $b_n = \dfrac{1}{a_n}$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ によって定まる数列 $\{b_n\}$ の初項から第 n 項までの和 T_n を n の式で表しなさい．

(1) $a_1 = S_1 = 1+6+11+6 = 24$

$n \geqq 2$ のとき，

$$\begin{aligned}
a_n &= S_n - S_{n-1} \\
&= n^4+6n^3+11n^2+6n-\{(n-1)^4+6(n-1)^3+11(n-1)^2+6(n-1)\} \\
&= n^4+6n^3+11n^2+6n-(n^4-4n^3+6n^2-4n+1+6n^3-18n^2+18n-6+11n^2-22n+11+6n-6) \\
&= 4n^3+12n^2+8n \\
&= 4n(n^2+3n+2) \\
&= 4n(n+1)(n+2)
\end{aligned}$$

これは $n=1$ のときも含んでいる．■

(2)
$$\begin{aligned}
T_n &= \sum_{k=1}^{n} b_k \\
&= \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} \\
&= \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)}\right\} \\
&= \frac{1}{8}\left\{\frac{1}{1\cdot 2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right\} \\
&= \underline{\frac{n(n+3)}{16(n+1)(n+2)}}\ /\!/
\end{aligned}$$