名城大学

2013年 薬学部 第2問

$\boxed{2}$ $b < a^2$ を満たす点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ から放物線 $C : y = x^2$ へ2本の接線 ℓ_1, ℓ_2 を引き，その接点をそれぞれ $(\alpha,\ \alpha^2)$, $(\beta,\ \beta^2)$ とする．ただし $\alpha < \beta$ にとる．放物線 C と2直線 ℓ_1, ℓ_2 で囲まれた部分の面積を S とするとき，次の各問に答えよ．

(1) a と b を α と β を用いてそれぞれ表せ．

(2) S を α と β を用いて表せ．

(3) 点Pが直線 $y = x - 2$ 上を動くときの S の最小値と，それを与えるPの座標を求めよ．

(1) $y' = 2x$ より，ℓ_1 の傾きは 2α，ℓ_2 の傾きは 2β

$\therefore \ell_1 : y = 2\alpha(x-\alpha) + \alpha^2 \quad \therefore \ell_1 : y = 2\alpha x - \alpha^2$

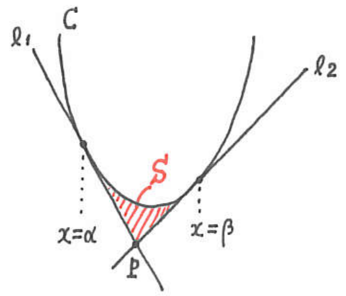
同様に，$\ell_2 : y = 2\beta x - \beta^2$

ℓ_1, ℓ_2 が点 $\mathrm{P}(a, b)$ を通ることより，

$$\begin{cases} b = 2\alpha a - \alpha^2 & \cdots ① \\ b = 2\beta a - \beta^2 & \cdots ② \end{cases}$$

①−② より，$(\alpha - \beta)\{2a - (\alpha+\beta)\} = 0$ 　$\alpha < \beta$ より，$\underline{a = \dfrac{\alpha+\beta}{2}}$ //

これを①に代入して，$\underline{b = \alpha\beta}$ //



(2) 右のグラフより，

$$S = \int_\alpha^a x^2 - (2\alpha x - \alpha^2)\,dx + \int_a^\beta x^2 - (2\beta x - \beta^2)\,dx$$

$$= \int_\alpha^a (x-\alpha)^2\,dx + \int_a^\beta (x-\beta)^2\,dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}(x-\alpha)^3\right]_\alpha^a + \left[\frac{1}{3}(x-\beta)^3\right]_a^\beta$$

$$= \frac{1}{3}(a-\alpha)^3 - \frac{1}{3}(a-\beta)^3$$

(1) より $a = \dfrac{\alpha+\beta}{2}$ を代入した

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)^3 - \frac{1}{3}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^3$$

$$= \underline{\frac{1}{12}(\beta-\alpha)^3} \text{ //}$$

(3) 点Pが $y = x - 2$ 上にあることより，$b = a - 2$

(1) の結果より，$\alpha + \beta = 2a$，$\alpha\beta = b = a - 2$

$\therefore (\beta-\alpha)^2 = (\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta = 4a^2 - 4(a-2) = 4\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + 7 \geqq 7$

$\beta - \alpha > 0$ より，$\beta - \alpha \geqq \sqrt{7}$（等号成立は $a = \frac{1}{2}$, $b = -\frac{3}{2}$ のとき）

$\therefore$ S の最小値は，$\underline{\frac{7}{12}\sqrt{7},\ \mathrm{P}\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)}$ //