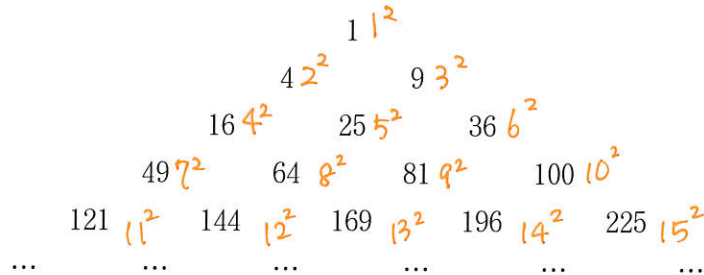




2014年 第1問

1 下の図は自然数の平方数を三角形状に順に並べたものである。各平方数については、第  $n$  段目の第  $m$  項と呼ぶことにする。例えば、第 4 段目の第 2 項と呼ばれる平方数は 64 である。このとき、次の各問に答えよ。



- (1) 第  $n$  段目の第 1 項を  $n$  を用いて表せ。  
 (2) 第  $n$  段目の各項の総和を  $n$  を用いて表せ。

(1) 第  $n-1$  段目までには (第  $n-1$  段を含めて)

$\sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{1}{2}n(n-1)$  項 があるので、第  $n$  段目の第 1 項は、

$$\left\{ \frac{1}{2}n(n-1) + 1 \right\}^2 = \frac{(n^2 - n + 2)^2}{4}$$

(2) ~~第  $n+1$  段目の第 1 項は (1) より、 $\left\{ \frac{1}{2}n(n+1) + 1 \right\}^2$~~

$\therefore$  第  $n$  段目の各項の総和は

$$\sum_{k=1}^{\frac{1}{2}n(n+1)} k^2 - \sum_{k=1}^{\frac{1}{2}n(n-1)} k^2 = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2}n(n+1) \left\{ \frac{1}{2}n(n+1) + 1 \right\} \left\{ n(n+1) + 1 \right\}$$

計算

大変!

$$- \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2}n(n-1) \left\{ \frac{1}{2}n(n-1) + 1 \right\} \left\{ n(n-1) + 1 \right\}$$

$$= \frac{1}{12} n (3n^2 + 1)(n^2 + 2)$$