長崎大学

2016年 経済・水産・環境科学部 第2問　1枚目/2枚　数理 石井K

2 空間において，3点 A(5, 0, 1)，B(4, 2, 0)，C(0, 1, 5) を頂点とする三角形 ABC がある．以下の問いに答えよ．

(1) 線分 AB，BC，CA の長さを求めよ．

(2) 三角形 ABC の面積 S を求めよ．

(3) 原点 O(0, 0, 0) から平面 ABC に垂線を下し，平面 ABC との交点を H とする．$\overrightarrow{AH} = \ell\overrightarrow{AB} + m\overrightarrow{AC}$ とおくとき，実数 ℓ，m の値を求めよ．

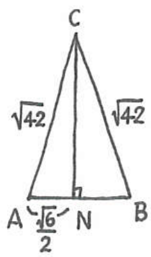
(4) 直線 AH と直線 BC の交点を M とする．$\overrightarrow{AH} = k\overrightarrow{AM}$ とおくとき，実数 k の値と三角形 HBC の面積 T を求めよ．

(5) 原点 O を頂点，四角形 ABHC を底面とする四角錐 O-ABHC の体積 V を求めよ．

(1) $AB = \sqrt{(5-4)^2+(0-2)^2+(1-0)^2} = \sqrt{6}$, $BC = \sqrt{(4-0)^2+(2-1)^2+(0-5)^2} = \sqrt{42}$

$CA = \sqrt{(5-0)^2+(0-1)^2+(1-5)^2} = \sqrt{42}$

$\therefore \underline{AB = \sqrt{6},\ BC = CA = \sqrt{42}}$ //



(2) △ABC は BC = CA の二等辺三角形より．AB の中点を N とすると，

$AN = \frac{\sqrt{6}}{2}$ で，CN ⊥ AB

三平方の定理より，$\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 + CN^2 = (\sqrt{42})^2$　$\therefore CN = \frac{9}{\sqrt{2}}$

$\therefore S = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{6}\cdot\frac{9}{\sqrt{2}} = \underline{\frac{9\sqrt{3}}{2}}$ //

(3) $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AH}$　ここで $\overrightarrow{AB} = (-1, 2, -1)$，$\overrightarrow{AC} = (-5, 1, 4)$ より．

$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \ell\overrightarrow{AB} + m\overrightarrow{AC} = (5-\ell-5m,\ 2\ell+m,\ 1-\ell+4m)$

$\overrightarrow{OH} \perp$ △ABC より．$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AC} = 0$ なので．

$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AB} = -5+\ell+5m+4\ell+2m-1+\ell-4m$

$= 6\ell+3m-6$

$\therefore 6\ell+3m-6=0$　すなわち．$2\ell+m=2$ …①

$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AC} = -25+5\ell+25m+2\ell+m+4-4\ell+16m$

$= 3\ell+42m-21$

$\therefore 3\ell+42m-21=0$　すなわち　$\ell+14m=7$ …②

①，②より．$\underline{\ell = \frac{7}{9},\ m = \frac{4}{9}}$ //

2016年 経済・水産・環境科学部 第2問　2枚目／2枚

数理 石井K

$\boxed{2}$ 空間において，3点 A(5, 0, 1)，B(4, 2, 0)，C(0, 1, 5) を頂点とする三角形 ABC がある．以下の問いに答えよ．

(1) 線分 AB，BC，CA の長さを求めよ．

(2) 三角形 ABC の面積 S を求めよ．

(3) 原点 O(0, 0, 0) から平面 ABC に垂線を下し，平面 ABC との交点を H とする．$\overrightarrow{\mathrm{AH}} = \ell\overrightarrow{\mathrm{AB}} + m\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ とおくとき，実数 ℓ, m の値を求めよ．

(4) 直線 AH と直線 BC の交点を M とする．$\overrightarrow{\mathrm{AH}} = k\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ とおくとき，実数 k の値と三角形 HBC の面積 T を求めよ．

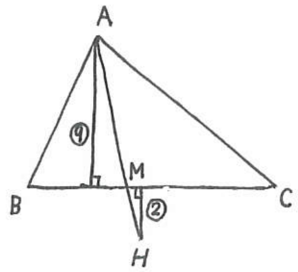
(5) 原点 O を頂点，四角形 ABHC を底面とする四角錐 O-ABHC の体積 V を求めよ．

(4) $\overrightarrow{AH} = \frac{7}{9}\overrightarrow{AB} + \frac{4}{9}\overrightarrow{AC}$

$= \frac{11}{9}\left(\frac{7}{11}\overrightarrow{AB} + \frac{4}{11}\overrightarrow{AC}\right)$

$= \frac{11}{9}\overrightarrow{AM}$

$\therefore\ \underline{k = \frac{11}{9}}$ //



右の図より，$T = \frac{2}{9}S$ （底辺BCは共通）

$= \frac{2}{9}\cdot\frac{9\sqrt{3}}{2}$

$= \underline{\sqrt{3}}$ //

(5) 四角形ABHCの面積は $S+T = \frac{11\sqrt{3}}{2}$

$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \frac{7}{9}\overrightarrow{AB} + \frac{4}{9}\overrightarrow{AC}$

$= (2, 2, 2)$

$\therefore\ |\overrightarrow{OH}| = \sqrt{2^2+2^2+2^2} = 2\sqrt{3}$

$\therefore\ V = \frac{1}{3}\cdot\frac{11\sqrt{3}}{2}\cdot 2\sqrt{3}$

$= \underline{11}$ //