

2013年 第6問

1枚目 / 2枚

数理  
石井

6  $a$  を定数とする。放物線  $y = a - x^2$  の接線のうち、原点との距離が最小になるものの方程式を求めよ。またそのときの距離を求めよ。

$y' = -2x$  より接点を  $(t, a - t^2)$  とおくと、接線は、

$$y = -2t(x - t) + a - t^2$$

すなわち接線は、 $2tx + y - a - t^2 = 0 \cdots (*)$

これと原点とのキヨリを  $L(t)$  とおくと、点と直線のキヨリ公式より、

$$L(t) = \frac{|-a - t^2|}{\sqrt{(2t)^2 + 1^2}} = \frac{|t^2 + a|}{\sqrt{4t^2 + 1}}$$

$x = t^2 (\geq 0)$  において、 $\{L(t)\}^2$  を  $x$  で表したものを  $f(x)$  とすると、

$$f(x) = \frac{(x+a)^2}{4x+1}$$

$$\therefore f'(x) = \frac{2(x+a)(4x+1) - (x+a)^2 \cdot 4}{(4x+1)^2} = \frac{4(x+a)(x - a + \frac{1}{2})}{(4x+1)^2}$$

(i)  $a \geq \frac{1}{2}$  のとき、 $x \geq 0$  において

$$f'(x) = 0 \text{ となるのは、} x = a - \frac{1}{2}$$

$\therefore f(x)$  が最小となるのは、右の増減表より、 $a - \frac{1}{4}$  ( $x = a - \frac{1}{2}$  のとき)

$\therefore (*)$  より接線の方程式は、 $y = \pm \sqrt{4a-2}x + 2a - \frac{1}{2}$

そのときのキヨリは、 $\sqrt{a - \frac{1}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{4a-1}$

$x$	0	...	$a - \frac{1}{2}$	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$	$a^2$	$\searrow$	$a - \frac{1}{4}$	$\nearrow$

$$t = \pm \sqrt{a - \frac{1}{2}}$$

(ii)  $0 \leq a < \frac{1}{2}$  のとき、

$x \geq 0$  において  $f'(x) \geq 0 \therefore f(x)$  は単調増加で、 $f(x) \geq f(0) = a^2$

$\therefore (*)$  より接線は、 $y = a$  そのときキヨリは、 $a$

(iii)  $a < 0$  のとき、 $f'(x) = 0$  となるのは、 $x \geq 0$  において、 $x = -a$

$\therefore f(x)$  が最小となるのは、右の増減表より、

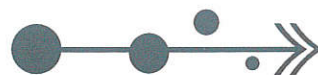
$x = -a$  のとき、最小値  $0$

$(*)$  より、接線は、 $y = \pm 2\sqrt{-a}x$  で、

そのときのキヨリは、 $0$

$x$	0	...	$-a$	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$	$a^2$	$\searrow$	0	$\nearrow$

2枚目に解答をまとめました。



2013年 第6問

2枚目 / 2枚



6  $a$  を定数とする。放物線  $y = a - x^2$  の接線のうち、原点との距離が最小になるものの方程式を求めよ。またそのときの距離を求めよ。

(i) ~ (iii) をまとめると、

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{方程式は. } y = \pm \sqrt{4a-2} x + 2a - \frac{1}{2}, \text{ キヨリは. } \frac{1}{2} \sqrt{4a-1} & (a \geq \frac{1}{2} \text{ のとき}) \\ y = a & a \quad (0 \leq a < \frac{1}{2} \text{ のとき}) \\ y = \pm 2\sqrt{-a} x & 0 \quad (a < 0 \text{ のとき}) \end{array} \right. \quad \text{—} //$$