# 山形大学

2015年 農学部 第3問

数理 石井K

$\boxed{3}$ 座標平面上の放物線 $y = x^2 - \frac{1}{2}ax + 2$ を $C$ とする．放物線 $C$ 上に点Pがあり，点Pの $x$ 座標が $a$ であるとき，次の問に答えよ．ただし，$a > 0$ とする．

(1) 点Pにおける放物線 $C$ の接線 $\ell_1$ の方程式を求めよ．

(2) 点Pを通り，直線 $\ell_1$ に垂直な直線 $\ell_2$ の方程式を求めよ．

(3) 放物線 $C$ と直線 $\ell_2$ の交点で，点Pと異なる点をQとするとき，点Qの座標を求めよ．

(4) 放物線 $C$ と直線 $\ell_2$ で囲まれた図形の面積 $S(a)$ を求めよ．

(5) 面積 $S(a)$ の最小値と，そのときの $a$ の値を求めよ．

(1) $P\left(a,\ \frac{1}{2}a^2+2\right)$，$y' = 2x - \frac{1}{2}a$ より．

$\ell_1 : y = \frac{3}{2}a(x-a) + \frac{1}{2}a^2 + 2 \iff \underline{\ell_1 : y = \frac{3}{2}ax - a^2 + 2}$ //

(2) 傾きは．$-\frac{2}{3a}$ なので

$\ell_2 : y = -\frac{2}{3a}(x-a) + \frac{1}{2}a^2 + 2 \iff \underline{\ell_2 : y = -\frac{2}{3a}x + \frac{1}{2}a^2 + \frac{8}{3}}$ //

(3) 方程式 $x^2 - \frac{1}{2}ax + 2 - \left(-\frac{2}{3a}x + \frac{1}{2}a^2 + \frac{8}{3}\right) = 0$

$\iff x^2 + \left(\frac{2}{3a} - \frac{1}{2}a\right)x - \frac{1}{2}a^2 - \frac{2}{3} = 0$

解と係数の関係より．$a + q = \frac{1}{2}a - \frac{2}{3a}$　$\therefore q = -\frac{1}{2}a - \frac{2}{3a}$

y座標は．$-\frac{2}{3a}\left(-\frac{1}{2}a - \frac{2}{3a}\right) + \frac{1}{2}a^2 + \frac{8}{3} = \frac{4}{9a^2} + \frac{1}{2}a^2 + 3$

$\therefore \underline{Q\left(-\frac{1}{2}a - \frac{2}{3a},\ \frac{4}{9a^2} + \frac{1}{2}a^2 + 3\right)}$ //

(4) $S(a) = \int_q^a -\frac{2}{3a}x + \frac{1}{2}a^2 + \frac{8}{3} - x^2 + \frac{1}{2}ax - 2\,dx = -\int_q^a (x-a)(x-q)\,dx$

$\therefore S(a) = \frac{1}{6}(a-q)^3 = \underline{\frac{1}{6}\left(\frac{3}{2}a + \frac{2}{3a}\right)^3}$ //

(5) $a>0$ より．相加・相乗平均の関係から．$\frac{3}{2}a + \frac{2}{3a} \geqq 2\sqrt{\frac{3a}{2}\cdot\frac{2}{3a}} = 2$　$\therefore S(a) \geqq \frac{4}{3}$

等号成立は．$\frac{3a}{2} = \frac{2}{3a} \iff a = \frac{2}{3}$ ($\because a>0$ より)　$\therefore \underline{a = \frac{2}{3}\text{ のとき 最小値 }\frac{4}{3}}$ //