

2015年 国際文理（国際教養）第4問

4 どの頂角も 180° より小さい四角形 ABCD（図1）があり、線分 AC と線分 BD の交点を W とする。この四角形を2つの三角形 $\triangle ABC$ と $\triangle ACD$ に分割し（図2）、それぞれの三角形の重心を G_1, G'_1 とする。また、同じ四角形を2つの三角形 $\triangle ABD$ と $\triangle BCD$ に分割し（図3）、それぞれの三角形の重心を G_2, G'_2 とする。さらに線分 $G_1G'_1$ と線分 $G_2G'_2$ の交点を G とする。実数 l, m は

$$\vec{AC} = l\vec{AB} + m\vec{AD}$$

を満たすとす。以下の問に答えなさい。

(1) $\vec{AG}_1, \vec{AG}'_1, \vec{AG}_2$ はそれぞれ、

$$\vec{AG}_1 = \frac{1}{3}(\vec{AB} + \vec{AC}), \quad \vec{AG}'_1 = \frac{1}{3}(\vec{AC} + \vec{AD}), \quad \vec{AG}_2 = \frac{1}{3}(\vec{AB} + \vec{AD})$$

となるが、 \vec{AG}'_2 を $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}$ を用いて表しなさい。

(2) $0 < p_1 < 1, 0 < p_2 < 1$ に対して、線分 $G_1G'_1$ を $p_1 : 1 - p_1$ に内分する点を H_1 とし、線分 $G_2G'_2$ を $p_2 : 1 - p_2$ に内分する点を H_2 とする。このとき、

$$\begin{aligned} \vec{AH}_1 &= (1 - p_1)\vec{AG}_1 + p_1\vec{AG}'_1 \\ \vec{AH}_2 &= (1 - p_2)\vec{AG}_2 + p_2\vec{AG}'_2 \end{aligned}$$

となるが、特に $H_1 = H_2 = G$ としたとき、 p_1, p_2 を l, m を用いて表しなさい。

(3) (2) と同じく $H_1 = H_2 = G$ としたとき、以下の式が成り立つことを示しなさい。

$$\frac{G'_1G}{G_1G} = \frac{m}{l} = \frac{BW}{DW}$$

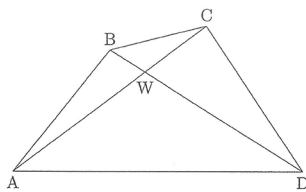


図1

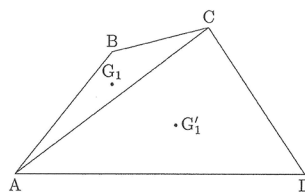


図2

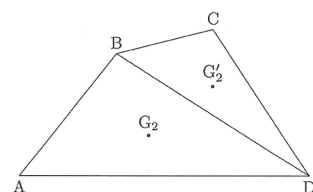


図3