2015年 国際文理（国際教養） 第2問

$\boxed{2}$ AC $=1$, $\angle B = 30^\circ$, $\angle C = 90^\circ$ の △ABC がある．辺 AB 上の点列 P_1, P_2, …，辺 AC 上の点列 Q_1, Q_2, …，辺 BC 上の点列 R_1, R_2, … を $R_1 \to P_1 \to Q_1 \to R_2 \to P_2 \to Q_2 \to \cdots$ の順で以下を満たすように定める．

(a) $R_1 = C$

(b) $R_nP_n \perp AB$

(c) $P_nQ_n \parallel BC$

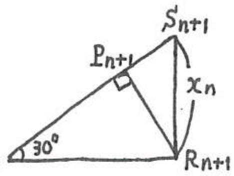
(d) $Q_nR_{n+1} \parallel AB$

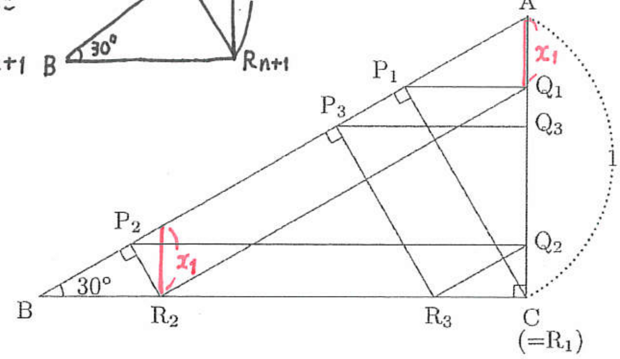
ただし，n は自然数である．下図は点 $R_1 \to P_1 \to \cdots \to Q_3$ を示している．$x_n = AQ_n$ とおくとき，以下の問に答えなさい．

(1) BR_{n+1} と BP_{n+1} をそれぞれ x_n の式で表しなさい．

(2) x_{n+1} を x_n の式で表しなさい．

(3) x_n を n の式で表しなさい．





(1) 右図のように R_{n+1} を通り，AC に平行な直線と AB との交点を S_{n+1} とすると，

$BR_{n+1} = \sqrt{3}\, S_{n+1}R_{n+1}$

$\therefore\ \underline{BR_{n+1} = \sqrt{3}\, x_n}$ //

$BP_{n+1} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} BR_{n+1}$

$\therefore\ \underline{BP_{n+1} = \dfrac{3}{2} x_n}$ //

(2) $AQ_{n+1} = \dfrac{1}{2}(2 - BP_{n+1})$

$= 1 - \dfrac{1}{2} BP_{n+1}$

$\therefore\ x_{n+1} = 1 - \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{2} x_n$　　$\therefore\ \underline{x_{n+1} = -\dfrac{3}{4} x_n + 1}$ //

(3) $x_{n+1} - \dfrac{4}{7} = -\dfrac{3}{4}\left(x_n - \dfrac{4}{7}\right)$　また，$P_1C = \dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{3}$ より，$CQ_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} P_1C = \dfrac{3}{4}$　$\therefore\ x_1 = 1 - \dfrac{3}{4} = \dfrac{1}{4}$

$\therefore$ 数列 $\left\{x_n - \dfrac{4}{7}\right\}$ は初項 $AQ_1 - \dfrac{4}{7} = \dfrac{1}{4} - \dfrac{4}{7} = -\dfrac{9}{28}$，公比 $-\dfrac{3}{4}$ の等比数列

$\therefore\ x_n - \dfrac{4}{7} = -\dfrac{9}{28}\cdot\left(-\dfrac{3}{4}\right)^{n-1}$

$\therefore\ \underline{x_n = \dfrac{4}{7} + \dfrac{3}{7}\cdot\left(-\dfrac{3}{4}\right)^{n}}$ //