福岡女子大学

2016年 国際文理（国際教養） 第4問

数理石井K

$\boxed{4}$ $a \geqq 0$ とする．3次関数 $f(x) = x^3 - 3a^2x + 2$ について，$f(x) = 0$ の1つの解は負，残りの解は正であるとする．また，$f(x)$ は $x = x_0$ のとき極大値，$x = x_1$ のとき極小値をとるとする．以下の問に答えなさい．

(1) 極大値 $f(x_0)$ と極小値 $f(x_1)$ を a の式で表しなさい．

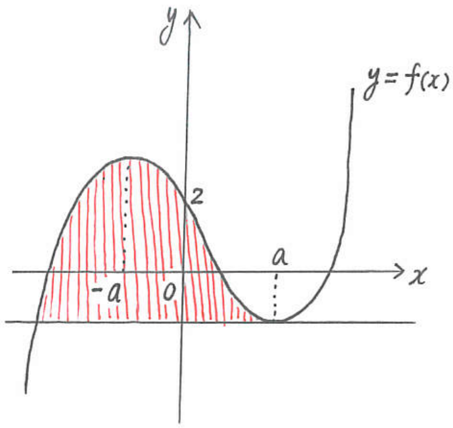
(2) $y = f(x)$ のグラフの概形を参考にして，a のとりうる値の範囲を求めなさい．

(3) $y = f(x)$ 上の点 $(x_1,\ f(x_1))$ における接線と $y = f(x)$ で囲まれた部分の面積を a の式で表しなさい．

(1) $f'(x) = 3x^2 - 3a^2 = 3(x+a)(x-a)$

よって．$x_0 = -a,\ x_1 = a$

$\underline{f(x_0) = f(-a) = 2a^3+2,\ f(x_1) = f(a) = -2a^3+2}$ //



(2) 右のグラフと．$f(x)=0$ が1つの負の解と2つの正の解（重解を含む）をもつことより．$f(x_1) \leqq 0$

$\therefore -2a^3+2 \leqq 0 \iff (a-1)\underbrace{(a^2+a+1)}_{>0} \geqq 0$

$\iff \underline{a \geqq 1}$ //

(3) 点 $(x_1, f(x_1))$ における接線を l とすると．$l : y = -2a^3+2$

$\therefore$ l と $y=f(x)$ の共有点を求めると．$x^3-3a^2x+2-(-2a^3+2) = 0$

$\therefore x^3-3a^2x+2a^3 = 0 \qquad \therefore (x-a)^2(x+2a) = 0$

$\therefore (a, -2a^3+2)$ と $(-2a, f(-2a))$

$$\therefore S = \int_{-2a}^{a} x^3-3a^2x+2-(-2a^3+2)\,dx$$

$$= \int_{-2a}^{a} x^3-3a^2x+2a^3\,dx$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{3}{2}a^2x^2 + 2a^3x\right]_{-2a}^{a}$$

$$= \frac{a^4}{4} - \frac{3}{2}a^4 + 2a^4 - (4a^4 - 6a^4 - 4a^4)$$

$$= \underline{\frac{27}{4}a^4}$$ //