2016年 国際文理（国際教養） 第3問

$\boxed{3}$ 以下の問に答えなさい．

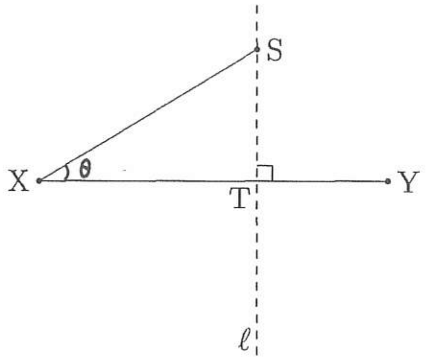
(1) 線分 XY に垂直に交わる直線 ℓ とその交点 T を考える．直線 ℓ 上の点 S に対し，内積 $\overrightarrow{XS}\cdot\overrightarrow{XY}$ は S の ℓ 上での位置に関係なく，線分 XT の長さと線分 XY の長さの積に等しいことを次の図を参考にして示しなさい．

(1) $\angle SXY=\theta$ とおくと．

$\overrightarrow{XS}\cdot\overrightarrow{XY}=|\overrightarrow{XS}||\overrightarrow{XY}|\cos\theta$

$=|\overrightarrow{XY}|\times|\overrightarrow{XS}|\cos\theta$

$=|\overrightarrow{XY}||\overrightarrow{XT}|$ ▨



(2) 2辺の長さが AB $=a$，AC $=b$ であるような △ABC を考える．その外心を O，外接円の半径を r とする．

(i) (1) および，次の図を参考にして，内積 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AO}$，$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AO}$ をそれぞれ a，b の式で表しなさい．

(2)(i) 線分ABの中点をMとすると (1)より

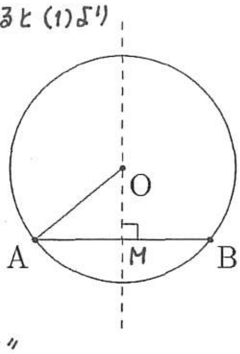
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AO}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AM}|$

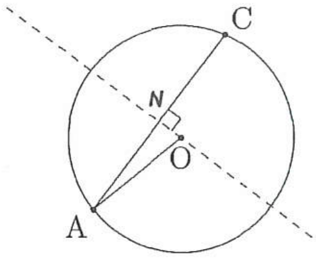
$=a\cdot\frac{1}{2}a$

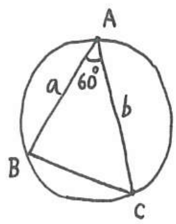
$=\underline{\frac{1}{2}a^2}$ //

線分ACの中点をNとすると

同様に $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AO}=\underline{\frac{1}{2}b^2}$ //







(ii) 特に $\angle BAC=60^\circ$ としたとき，内積 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ を求めなさい．さらに，

$$\overrightarrow{AO}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$$

を満たす実数 x，y をそれぞれ a，b の式で表しなさい．

(ii) 右図より $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=ab\cos60^\circ=\underline{\frac{1}{2}ab}$ //

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AB}\cdot(x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC})=a^2x+\frac{1}{2}aby$

(2)(i)より $a^2x+\frac{1}{2}aby=\frac{1}{2}a^2$

$a>0$ より，$2ax+by=a$ …①

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AC}\cdot(x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC})=\frac{1}{2}abx+b^2y$

(2)(i)より $\frac{1}{2}abx+b^2y=\frac{1}{2}b^2$

$b>0$ より，$ax+2by=b$ …②

①,②より，$\underline{x=\frac{2a-b}{3a},\ y=\frac{-a+2b}{3b}}$ //

(iii) (ii) において，r を a，b の式で表しなさい．

(iii) $r=|\overrightarrow{AO}|$ より

$r^2=x^2|\overrightarrow{AB}|^2+2xy\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+y^2|\overrightarrow{AC}|^2$

$=a^2x^2+abxy+b^2y^2$

$=(ax+by)^2-abxy$

$=\frac{a^2-ab+b^2}{3}$　　$r>0$ より $\underline{r=\sqrt{\frac{a^2-ab+b^2}{3}}}$ //