金沢大学

2013年 理系 第3問

数理 石井K

$\boxed{3}$ $a>0$ とする．$x \geqq 0$ における関数 $f(x)=e^{\sqrt{ax}}$ と曲線 $C: y=f(x)$ について，次の問いに答えよ．

(1) C 上の点 $\mathrm{P}\left(\dfrac{1}{a},\ f\left(\dfrac{1}{a}\right)\right)$ における接線 ℓ の方程式を求めよ．また，P を通り ℓ に直交する直線 m の方程式を求めよ．

(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{a}} f(x)\,dx$ を $t=\sqrt{ax}$ とおくことにより求めよ．

(3) 曲線 C，直線 $y=1$ および直線 m で囲まれた図形の面積 $S(a)$ を求めよ．また，$a>0$ における $S(a)$ の最小値とそれを与える a の値を求めよ．

(1) $f'(x)=(\sqrt{ax})'e^{\sqrt{ax}}=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{a}{x}}\,e^{\sqrt{ax}}$

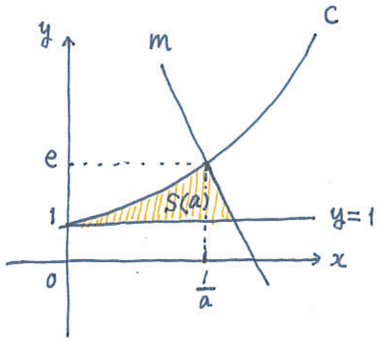
$\therefore f'\left(\dfrac{1}{a}\right)=\dfrac{1}{2}ae$　　$\therefore \ell: y=\dfrac{1}{2}ae\left(x-\dfrac{1}{a}\right)+e$　　$\therefore \ell: y=\dfrac{1}{2}aex+\dfrac{1}{2}e$ //

$m: y=-\dfrac{2}{ae}\left(x-\dfrac{1}{a}\right)+e$　　$\therefore m: y=-\dfrac{2}{ae}x+\dfrac{2}{a^2e}+e$ //

(2) $t=\sqrt{ax}$ より．$dt=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{a}{x}}\,dx$，

x	$0 \to \frac{1}{a}$
t	$0 \to 1$

$$\int_0^{\frac{1}{a}} e^{\sqrt{ax}}dx=\int_0^1 e^t\cdot\frac{2}{a}\cdot t\,dt$$
$$=\frac{2}{a}\int_0^1 t(e^t)'dt$$
$$=\frac{2}{a}\left[te^t\right]_0^1-\frac{2}{a}\int_0^1 e^t\,dt$$
$$=\frac{2e}{a}-\frac{2}{a}\left[e^t\right]_0^1$$
$$=\frac{2}{a}$$ //



(3) $y=1$ と m の交点の x 座標は．$x=\dfrac{1}{a}+\dfrac{ae^2}{2}-\dfrac{ae}{2}$

$\therefore$ (2) を使うと．$S(a)=\dfrac{2}{a}-\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{2}(e-1)\left(\dfrac{ae^2}{2}-\dfrac{ae}{2}\right)$

$$=\frac{1}{a}+\frac{ae}{4}(e-1)^2$$
$$\geqq 2\sqrt{\frac{1}{a}\cdot\frac{ae}{4}\cdot(e-1)^2}\quad(\text{相加・相乗})$$
$$=\sqrt{e}(e-1)$$

等号成立は

$\dfrac{1}{a}=\dfrac{ae}{4}(e-1)^2$

$\Leftrightarrow a=\dfrac{2}{(e-1)\sqrt{e}}$

$\therefore$ 最小値は $(e-1)\sqrt{e}$ $\left(a=\dfrac{2}{(e-1)\sqrt{e}}\right.$ のとき$\left.\right)$ //