



2014年医学部第3問

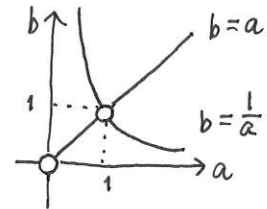
3  $a > 0, a \neq 1, b > 0$  とする。このとき、変数  $x$  の関数

$$f(x) = 4x^2 + 4x \log_a b + 1$$

について、次の各問に答えよ。

- (1) 2次方程式  $f(x) = 0$  が重解を持つようなすべての  $a, b$  を、座標平面上の点  $(a, b)$  として図示せよ。  
 (2) 2次方程式  $f(x) = 0$  が  $0 < x < \frac{1}{2}$  の範囲内にただ1つの解を持つようなすべての  $a, b$  を、座標平面上の点  $(a, b)$  として図示せよ。  
 (3) 放物線  $y = f(x)$  の頂点の座標を  $(X, Y)$  とする。点  $(a, b)$  が(2)の条件を満たしながら動くとき、点  $(X, Y)$  の軌跡を座標平面上に図示せよ。

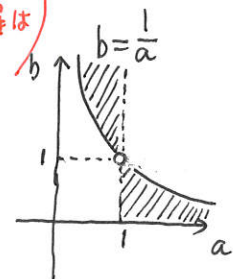
(1) 判別式を  $D$  とすると、 $D = (2 \log_a b)^2 - 4 = 0$   
 $\therefore \log_a b = \pm 1 \quad \therefore a = b \text{ または } \frac{1}{a} = b$



(2)  $f(0) \cdot f(\frac{1}{2}) < 0$  となればよいので (1)より重解をもつときは、  
 重解は  $x = \pm \frac{1}{2}$  なの重解は  
 もたない

$$2 + 2 \log_a b < 0 \Leftrightarrow \log_a b < -1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a < 1 \text{ のとき } b > \frac{1}{a} \\ a > 1 \text{ のとき } b < \frac{1}{a} \end{cases}$$



$\therefore$  右図の斜線部分 (ただし境界線は含まない)

(3)  $f(x) = 4 \left\{ x + \frac{1}{2} \log_a b \right\}^2 - (\log_a b)^2 + 1$

$$\therefore X = -\frac{\log_a b}{2}, \quad Y = 1 - (\log_a b)^2 \quad \text{よって, } Y = 1 - (-2X)^2$$

(2)より、 $\log_a b < -1$

$$\therefore Y = 1 - 4X^2$$

$$\therefore -2X < -1 \Leftrightarrow X > \frac{1}{2}$$

以上より、

求める軌跡は、放物線  $y = 1 - 4x^2$  の  $x > \frac{1}{2}$  の部分

