0001633546638999

京都大学

2014年 第1問

数理 石井K

$\boxed{1}$ $0^\circ \leqq \theta < 90^\circ$ とする．x についての 4 次方程式

$$\{x^2-2(\cos\theta)x-\cos\theta+1\}\{x^2+2(\tan\theta)x+3\}=0 \quad — ⊛$$

は虚数解を少なくとも 1 つ持つことを示せ．

(与式) $\iff \begin{cases} x^2-2(\cos\theta)x-\cos\theta+1=0 & —① \text{ または} \\ x^2+2(\tan\theta)x+3=0 & —② \end{cases}$

背理法により示す．ある θ ($0^\circ \leqq \theta < 90^\circ$) に対して ⊛ の解がすべて実数解であると仮定すると．

①は判別式を D_1 とおくと．

メモ：$x^2+x-1=0$ は $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+4}}{2}$

$$\frac{D_1}{4}=\cos^2\theta+\cos\theta-1 \geqq 0$$

$\therefore$ $0^\circ \leqq \theta < 90^\circ$ より $0<\cos\theta \leqq 1$ なので

$$\frac{-1+\sqrt5}{2} \leqq \cos\theta \leqq 1 \quad —— ⓐ$$

解いて気付いたけど背理法を使うまでもなかった。

②の判別式を D_2 とおくと．

$$\frac{D_2}{4}=\tan^2\theta-3 \geqq 0$$

$\boxed{\text{①が実数解のみをもつ} \Longrightarrow \text{②が虚数解をもつ}}$

これをいえばよい。

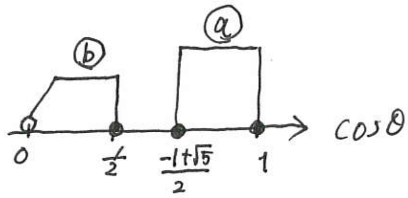
$$\therefore \frac{1-\cos^2\theta}{\cos^2\theta}-3 \geqq 0$$

$$\therefore 1-4\cos^2\theta \geqq 0$$

$$\therefore \cos^2\theta \leqq \frac14$$

$0<\cos\theta \leqq 1$ なので

$$0<\cos\theta \leqq \frac12 \quad —— ⓑ$$



$$\frac{-1+\sqrt5}{2} > \frac{-1+2.2}{2} = 0.6$$

よって ⓐ, ⓑ をともにみたす θ は存在しない $\therefore$ 矛盾 ▨