2014年 文系 第6問

$\boxed{6}$ $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right)(3a_n - 2) + 2$ ($n = 1, 2, 3, \cdots$) で定まる数列 $\{a_n\}$ について，次の問いに答えよ．

(1) 数列 $\{b_n\}$ を $b_n = na_n$ ($n = 1, 2, 3, \cdots$) で定めるとき，b_n と b_{n+1} の関係式を求めよ．

(2) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(1) (与式) の両辺に $(n+1)$ をかけて．

$$(n+1)a_{n+1} = n(3a_n - 2) + 2(n+1)$$

$$\therefore \underline{b_{n+1} = 3 \cdot b_n + 2}$$

(2) $\therefore b_{n+1} + 1 = 3(b_n + 1)$

$\therefore$ 数列 $\{b_n + 1\}$ は初項 $b_1 + 1 = a_1 + 1 = 2$，公比 3 の等比数列となる

$$\therefore b_n + 1 = 2 \cdot 3^{n-1}$$

$$\therefore b_n = 2 \cdot 3^{n-1} - 1$$

$$\therefore na_n = 2 \cdot 3^{n-1} - 1$$

$$\underline{a_n = \frac{2 \cdot 3^{n-1} - 1}{n}}$$