大阪大学

2017年 文系 第3問

数理 石井K

$\boxed{3}$ 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ がある.

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = 8{a_n}^2 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

(1) $b_n = \log_2 a_n$ とおく. b_{n+1} を b_n を用いてあらわせ.

(2) 数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ.

(3) $P_n = a_1 a_2 a_3 \cdots a_n$ とおく. 数列 $\{P_n\}$ の一般項を求めよ.

(4) $P_n > 10^{100}$ となる最小の自然数 n を求めよ.

(1) 帰納的に $a_n > 0$ $(n = 1, 2, \cdots)$ であることが分かるので

漸化式の両辺, 底が2の対数をとり,

$$\log_2 a_{n+1} = \log_2 8{a_n}^2$$
$$= 2\log_2 a_n + 3$$

$\therefore$ $\underline{b_{n+1} = 2b_n + 3}$ //

(2) $b_{n+1} + 3 = 2(b_n + 3)$

また, $b_1 = \log_2 a_1 = 1$ より, $b_1 + 3 = 4$

数列 $\{b_n + 3\}$ は初項4, 公比2の等比数列より, $b_n + 3 = 4 \cdot 2^{n-1}$

$\therefore$ $\underline{b_n = 2^{n+1} - 3}$ //

(3) $P_n > 0$ $(n = 1, 2, \cdots)$ であるから対数をとると,

$$\log_2 P_n = \log_2 a_1 \cdot a_2 \cdots a_n$$
$$= \log_2 a_1 + \log_2 a_2 + \cdots + \log_2 a_n$$
$$= b_1 + b_2 + \cdots + b_n$$
$$= \sum_{k=1}^{n} (2^{k+1} - 3)$$
$$= \frac{4(1-2^n)}{1-2} - 3n$$
$$= 2^{n+2} - 3n - 4$$

$\therefore$ $\underline{P_n = 2^{2^{n+2} - 3n - 4}}$ //

(4) $P_n > 10^{100} \iff \log_2 P_n > 100\log_2 10$

$\iff 2^{n+2} - 3n - 4 > 100\log_2 10 \quad \cdots (*)$

ここで, $3 < \log_2 10 < 4$ より,

$300 < 100\log_2 10 < 400$

一方 $(*)$ の左辺は,

$n = 1$ のとき, 1

$n = 2$ のとき, 6

$n = 3$ のとき, 19

$n = 4$ のとき, 48

$n = 5$ のとき, 109

$n = 6$ のとき, 234

$n = 7$ のとき, 487

$\therefore$ $\underline{n = 7}$ //